FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI

Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luennot, kevät 2006

Kari Astala ja Petteri Piiroinen

Sopivaa oheis- ja lisälukemistoa tarjoavat esimerkiksi seuraavat oppikirjat:

* D. Werner, Funktionalanalysis. Springer. (hyvä yleiskirja, saksankielinen)

* B. Bollobás, Linear Analysis Cambridge Univ. Press, 1999. (ytimekäs yleiskirja)

* W. Rudin, Real and Complex Analysis (3. painos), McGraw-Hill, 1987. (luvut 3-5, ei kata koko kurssia)

* A. Friedman, Foundations of Modern Analysis, Dover, 1982. (tiivis yleiskirja,
myös mittateoriaa ja reaalianalyysia)

* W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1991. (erilainen, laaja yleiskirja)

* J. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer, 1990. (yleiskirja)

* I. J. Maddox, Elements of Functional analysis, Cambridge University Press, 1977

Sisältö

KORJATTUJA PAINOVIRHEITÄ:

- s. 6, Propositio 1.4 nimetty lauseeksi 1.4
- s. 7. Esimerkejä ja s. 13 , Esimerkki 2.11. (2); pitää lukea:
  $\mathcal{P} \; = \; \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : \; a_k \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{N}\}$
- s. 8, rivi -3, pitää olla: $\| f \|_\infty := \sup_{t \in A} |f(t)|$
- s. 9, s.10 ja s.12, ”$\ell^i nfty$” pitää olla ℓ^∞
- s. 14 Hölderin epäyhtälön viimeiseen normiin lisätty eksponentti $1/q$
- s. 39 katkelma ”. . . modulo Y” korvattu katkelmalla ”. . . modulo M” 4. rivillä ennen kaavaa (3.28)
- s. 46 rivit 9 ja 10: pitää olla $\lambda < 1/\| K \|_\infty$
- s. 39 Hölderin epäyhtälössä pitää olla $|g(x)|^q$
- s. 35 kaava (3.39): vaihdettu $c \to k$.
- s. 53 rivi -11 ”Lause 4.2” vaihdettu ”Schwarzin epäyhtälöksi 2.18”.
- s. 54 rivi 8–9 poistettu lause ”tai Cauchy. . . sivulla 52.”

0. Johdanto

Funktionaalianalyysissa tutkitaan muun muassa

– ääretönulotteisten vektoriavaruuksien, ja erityisesti täydellisten normiavaruuksien eli Banach avaruuksien ominaisuuksia.
(joskus myös yleisempien topologisten vektoriavaruuksien ominaisuuksia).

– näiden välisten jatkuvien lineaaristen (tai epälineaaristen) kuvausten ominaisuuksia.

– edellisten kohtien monia eri sovelluksia.

Yritämme seuraavan esimerkin kautta selvittää, miksi tällaisia kysymyksiä tutkitaan, ja samalla myös millaisia sovelluksia funktionaalianalyysillä tyypillisesti on.

Esimerkki: Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s) f(s) ds = g(x), \quad x \in [0,1], \tag{0.1}$$

missä $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Tehtävänä on löytää funktio f, jolle yhtälö (0.1) pätee.
Käy ilmi että

i) jos parametri $|\lambda|$ on pieni, yhtälön ratkaisu olemassa ja yksikäsitteinen; toisaalta

ii) kaikilla $|\lambda|$:illa näin ei välttämättä ole; herää siis kysymys mitä voidaan sanoa näistä poikkeuksellisista parametreista.

Tällaisiin kysymyksiin päädytään esimerkiksi monissa fysiikan kysymyksissä, vaikkapa viulun kielen ominaisvärähtelyjä määrättäessä. Itse asiassa, yksi matemaattisen fysiikan keskeisistä kysymyksistä 1900–luvun taitteessa oli selittää miksi ominaisvärähtelyjen joukko (so. poikkeusparametrien joukko) on diskreetti; kysymys palautui differentiaaliyhtälöiden kautta tyyppiä (0.1) oleviin yhtälöihin.

Huomaa että funktio $K(x,s)$ voi olla hyvinkin monimutkainen, eikä yhtälön suora integrointi, tavalla tai toisella, voi tulla kysymykseen; korkeintaan voimme hakea numeerisia ratkaisuja, kunhan yhtälöt kunnolla ymmärretään. Miten yhtälöitä (0.1) voisi silloin lähestyä ?

Tilanteen selvittämistä varten identifioidaan ensin (mahdollisten) ratkaisujen avaruus; luonnollinen arvaus on seuraava vektoriavaruus joka esiintyy jo Analyysi I:ssä (entisessä Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1:ssä),

$$C(0,1) = \{ \ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ jatkuva välillä } [0,1] \ \}$$

Avaruuteen liittyy luonnollinen ”etäisyyden” mitta, eli normi (tästä myöhemmin paljon lisää):

$$\| f \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| < \infty \quad , \ f \in C(0,1).$$

Pari ($C(0,1), \| \cdot \|_\infty$) tulee olemaan tyypillinen esimerkki *Banachin avaruudesta.*

Yhtälöön (0.1) liittyy operaattori

$$T : C(0,1) \to C(0,1), \quad (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s) f(s) ds$$

Huomataan, että tämä on avaruuden $C(0,1)$ luonnollisen yhteenlaskun suhteen *lineaarinen*, so.

$$T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 T(f) + \lambda_2 T(g) \quad \forall \ f, g \in C(0,1)$$

Lisäksi, yhtälö (0.1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$f - \lambda \, T(f) = g$$

Kysymys on siis siitä, onko lineaarinen operaattori $I - \lambda T$ kääntyvä (bijektio)! Integraaliyhtälömme on nyt muuttunut lineaarisen operaattorin ominaisarvotehtäväksi, ja ratkaisua varten meidän tulee kehittää ”lineaarialgebrallisia” menetelmiä vektoriavaruuksissa kuten $C(0,1)$.

Nopeasti havaitaan kuitenkin selvä pulma: vektoriavaruus $C(0,1)$ on äärettönulotteinen! Ei siis ole ollenkaan selvää mitkä/millä ehdoin lineaarialgebran tulokset yleistyvät näihin uusiin avaruuksiin. Tai mitä operaattoreilta vaaditaan, että lineaarialgebran ominaisarvotehtävät yleistyvät näihin äärettönulotteisiin tilanteisiin.

Funktionaalianalyysi pyrkii vastaamaan tämän tyyppisiin kysymyksiin, kehittämään äärettönulotteisten avaruuksien teoriaa silmälläpitäen esim. yllä kuvatun kaltaisia sovelluskohteita. Tällä kurssilla selvitämme Banach avaruuksien perusominaisuudet, keskeisimmät esimerkit (funktio- yms.)avaruuksista sekä myös Banach avaruuksien operaattoreiden perusominaisuudet. Pyrimme myös antamaan esimerkkejä teorian sovelluksista, ja tulemme mm. osoittamaan yo. väitteen i); jos aika riittää kurssin loppupuolella voidaan myös tarkastella kysymystä ii).

Sana "funktionaali" tarkoitti alunperin (noin 1880 – 1910) sellaista jatkuvaa kuvausta, jonka määrittelyjoukko on jokin "funktioavaruus"; tyypillisesti

$$\varphi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{tai}$$

$$\phi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_0^1 f(s)^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{(epälineaarinen funktionaali).}$$

Nyttemmin termin käyttö on hieman muuttunut, kuten myöhemmin huomaamme.

Funktionaalianalyysin *sovellusaloja* ovat muun muassa

- (muu) klassinen analyysi (reaali-, kompleksi- ja harmoninen analyysi)
- variaatiolaskenta ja approksimaatioteoria
- differentiaali- ja integraaliyhtälöt (TDY,ODY)
- matemaattinen fysiikka (kvanttimekaniikka, ...)
- dynaamiset systeemit
- optimointi
- numeerinen analyysi (teoria)
- tn-teoria ja stokastiikka

⋮

Kääntäen, analyysi ja sen sovellukset synnyttävät jatkuvasti uusia funktionaalianalyysin tutkimuksia.

1. Metriikka ja metrinen avaruus

1.1. **Määritelmä.** Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *metriikka* X:ssä, jos

(M1) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$ (”*kolmioepäyhtälö*”)

(M2) $d(y,x) = d(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$

(M3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*Huom:* $d(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$)

Sanomme, että (X,d) eli joukko X varustettuna metriikalla d, on *metrinen avaruus* (yleensä jätetään d merkitsemättä, jos se selviää yhteydestä).

Huomautus.

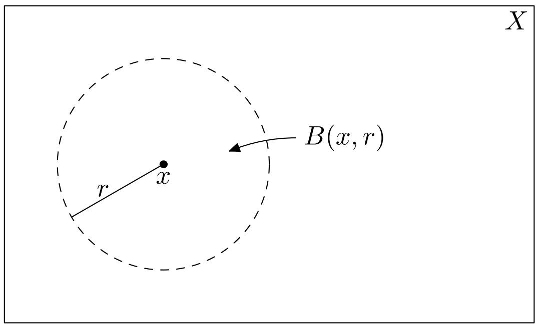
(1) Funktionaalianalyysin peruskurssilla metriikka d on (yleensä) jonkin normin indusoima (vrt. luku 2).
(2) Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *semimetriikka*, jos d toteuttaa aksiomat (M1), (M2) sekä aksioman

    (M4) $d(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Merkintöjä: Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $x \in X$, $r > 0$:

$B(x,r) = \{\ y \in X :\ d(x,y) < r\ \}$ *avoin* x-keskinen, r-säteinen pallo

$\overline{B}(x,r) = \{\ y \in X :\ d(x,y) \leq r\ \}$ *suljettu* x-keskinen, r-säteinen pallo.



Kuva 1. Avoin pallo $B(x,r)$ metrisessä avaruudessa (X,d)

Oletamme, että lukija on tutustunut metristen avaruuksien perusteisiin (vrt. esim. [Väisälä : Topologia I]). Lukijan tulisi kerrata mitä metrisissä avaruuksissa tarkoittavat käsitteet avoin joukko, suljettu joukko ja kompakti joukko; samoin mitä tarkoitetaan ympäristöllä, ympäristökannalla, aliavaruudella, suppenevalla pistejonolla, jatkuvalla kuvauksella,.....

Muistamisen helpottamiseksi listaamme alla lyhyesti eräitä näistä käsitteistä.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus:

– avoimet ja suljetut joukot: joukko $A \subset X$ on *avoin* jos jokaista $x \in A$ vastaa sellainen $r = r_x > 0$, että avoin pallo
$$B(x, r) \subset A$$
$A \subset X$ on *suljettu* jos komplementti
$$A^{\complement} = \{\, x \in X : \; x \notin A \,\} \text{ on avoin}$$
– metriikan indusoima *topologia* on joukkoperhe
$$\tau_d = \{\, A \subset X : \; A \text{ on avoin } \; X\text{:ssä } \}.$$
– ympäristökanta, relatiivitopologia

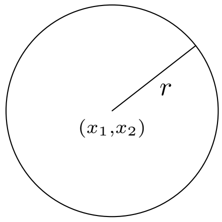
– jonon raja-arvo ja suppeneminen: jono $(x_n) \subset X$ *suppenee* kohti $x \in X$, jos
$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
Siis jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Merkintä:
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ tai } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$
– jatkuva kuvaus : Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f \colon X \to Y$ on *jatkuva* pisteessä $x \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, että
$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina kun } d(x, y) < \delta \text{ (ja } y \in X).$$
f on *jatkuva X:ssä* jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

– kompakti joukko (Heine-Borel, ...)

1.2. **Esimerkki.** $\mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella metriikalla
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2},$$
kun $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. (erikoistapaus $n = 1 : \; d(x, y) = |x - y|, \; x, y \in \mathbb{R}$).

Kuvaus d on metriikka : TopoI, DII (tai myöhemmin avaruuden ℓ^p yhteydessä). Kun $n = 2$ ja $x = (x_1, x_2)$, niin $y = (y_1, y_2) \in B\big(x, r\big)$ jos ja vain jos $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2$.

Metrinen avaruus (X, d) on *separoituva*, jos on olemassa numeroituva osajoukko $A \in X$, niin että joukon A sulkeuma $\bar{A} = X$. Sanomme myös, että A



Kuva 2. Avoin tason $\mathbb{R}^2$ pallo $B((x_1, x_2), r)$

on *tiheä* X:ssä. Sulkeuma voidaan kuvailla metriikan d avulla: jos $A \in X$, niin A:n *sulkeumalle* $\bar{A}$ on

$$x \in \bar{A} \iff \text{on olemassa sellainen jono } (x_n) \subset A, \quad \text{että } d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Separoituvuusehto $\bar{A} = X$ tarkoittaa siis: jos $y \in X$ ja $\varepsilon > 0$ ovat mielivaltaisia, niin on olemassa sellainen alkio $x \in A$, että $d(x, y) < \varepsilon$.

1.3. **Esimerkki.** $(\mathbb{R}^n, d)$ on separoituva, kun d on euklidinen etäisyys.

Todistus. Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on annettuja, niin valitaan jokaisella $j \in \{1, \dots, n\}$ sellainen rationaaliluku $q_j \in \mathbb{Q}$, että

$$|x_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \; j = 1, \dots, n,$$

mikä on mahdollista, sillä $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tällöin $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n$, joka on numeroituva ($\mathbb{Q}$ on numeroituva) ja

$$d(x, q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j - q_j|^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{n}}} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

□

1.4. **Lause.** *Olkoon X metrinen avaruus ja oletetaan, että on olemassa ylinumeroituva kokoelma $\mathcal{U}$ avaruuden X avoimia pistevieraita epätyhjiä osajoukkoja. Silloin X* ei ole *separoituva.*

Todistus. Vastaoletus: Oletetaan, että X on separoituva. Tällöin $X = \overline{A}$, missä $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ numeroituva.

Jos $U \in \mathcal{U}$, niin $U \subset X$ on avoin ja epätyhjä. Siispä löytyy sellainen $n_U \in \mathbb{N}$, että $a_{n_U} \in U$. Saadaan siis kuvaus $\alpha\colon \mathcal{U} \to \mathbb{N}$, $\alpha(U) = n_U$.

Näin saatu kuvaus α on *injektio*, sillä jos $U, V \in \mathcal{U}$ ja $U \neq V$, niin $U \cap V = \emptyset$. Tämä seuraa, sillä oletuksen nojalla $\mathcal{U}$ on pistevieras kokoelma. Siispä jos $a_{n_U} \neq a_{n_V}$, niin $n_U \neq n_V$, joten kuvaus α on injektio.

Tästä kuitenkin seuraisi, että $\mathcal{U}$ on numeroituva, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

2. Normi ja normiavaruus

Olkoon E vektoriavaruus (eli lineaariavaruus) skalaarikuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Kurssilla Lineaarialgebra I määriteltiin vain $\mathbb{R}$-kertoimiset vektoriavaruudet, mutta kompleksikertoimiset avaruudet määritellään täysin analogisesti: Avaruudessa E on yhteenlaskun $x + y$ lisäksi annettu skalaarillla kertominen $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, kuvaus $\mathbb{C} \times E \to E$, joka toteuttaa ehdot

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \text{ja} \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

kaikilla vektoreilla $x, y \in E$ ja skalaareilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Useimmiten kurssin tulokset ja käsitteet toimivat täysin samoin molemmille skalaarikunnan valinnalle, $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, ja käytämme silloin skalaarikunnalle merkintää $\mathbb{K}$. Jos skalaarikunta pitää spesifioida, siitä huomautetaan erikseen.

Esimerkkejä. $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{C}\}$ on $\mathbb{C}$-kertoiminen vektoriavaruus. Sellainen on myös kompleksisten polynomien avaruus

$$\mathcal{P} \;=\; \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : \; a_k \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{N}\}$$

Dimensio: Kerrataan ensin lineaarialgebran käsitteitä. Jos $A \subset E$, sen virittämä E:n vektorialiavaruus on

$$\operatorname{span}(A) = \{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k : \; x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}\} \tag{2.1}$$

Lineaarialgebrasta muistetaan myös että vektorijono $x_1, \ldots, x_n \in E$ on lineaarisesti riippumaton eli vapaa, jos

$$\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Honkasalon monisteen Lineaarialgebra I sivulla 50 on todistettu seuraava tulos, jonka oletamme tunnetuksi:

Vektoriavaruus E on äärellisulotteinen (so. äärellisen vektorijoukon virittämä) jos ja vain jos E:n vapaiden jonojen *pituudet* ovat ylhäältä rajoitetut, so. on luku $M < \infty$ niin että jokaisessa E:n vapaassa joukossa on korkeintaan M vektoria.

Muistetaan vielä, että äärellisulotteisen avaruuden E dimensio $\dim(E)$ on E:n kannan (so. vapaan virittäjäjoukon) lukumäärä; tämä lukumäärä on kannasta riippumaton luku.

Tämä kaikki toimii myös kun kerroinkuntana on $\mathbb{C}$. Esimerkiksi yllä $\mathbb{C}^n$ on äärellisulotteinen (tarkemmin, n-ulotteinen), kun taas $\mathcal{P}$ on ääretönulotteinen: Vektorit z^n, $n \in \mathbb{N}$, muodostavat vapaan joukon (Miksi ?) ja koska tuo joukko on ääretön, yo. tuloksen nojalla $\dim(\mathcal{P}) = \infty$.

Keskeinen idea Funktionaalianalyysissä on tuoda hyödyllisiä struktuureja funktioiden muodostamiin vektoriavaruuksiin erilaisten normien avulla.

2.2. **Määritelmä.** Kuvaus $p : E \to \mathbb{R}_+$ on *normi* E:ssä , jos

(N1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ kaikilla $x, y \in E$ (”*kolmioepäyhtälö*”)

(N2) $p(ax) = |a|p(x)$ kaikilla $x \in E, a \in \mathbb{K}$ (”*homogeenisuus*”)

(N3) $p(x) = 0 \iff x = \bar{0}$ (nolla-alkio E:ssä)

Tavallisesti merkitään $p(x) = \| x \|$. Paria $(E, \| \cdot \|)$ eli vektoriavaruutta E varustettuna normilla $\| \cdot \|$ sanotaan *normiavaruudeksi.*

Huomautus.

(1) normi $\| \cdot \|$ edellyttää , että määrittelyjoukko E on lineaariavaruus:

$$x + y \in E \text{ kun } x, y \in E \text{ ja } ax \in E \text{ kun } x \in E, a \in \mathbb{K}.$$

(2) Kuvaus $p : E \to \mathbb{R}_+$ on *seminormi* E:ssä, jos p toteuttaa ehdot (N1) ja (N2).[1] Tällöin

$$p(\bar{0}) = p(0 \cdot \bar{0}) = |0|p(\bar{0}) = 0,$$

ja $\{ x \in E : \ p(x) = 0 \}$ on avaruuden E vektorialiavaruus ehtojen (N1) ja (N2) nojalla.

2.3. **Esimerkkejä.**

(1) $$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *euklidinen* normi, kun $n = 1, 2, \ldots$. Ehdot (N1)-(N3) toteutuvat; katso Topo I. Hieman myöhemmin tämä todistetaan myös erikoistapauksena yleisemmän avaruuden ℓ^p yhteydessä.

(2) Kun A on (m.v.) joukko, asetetaan

$$B(A, \mathbb{K}) := \{ f \colon A \to K : \ \| f \|_\infty := \sup_{t \in A} |f(t)| < \infty \}.$$

Tämä on rajoitettujen kuvausten $A \to \mathbb{K}$ avaruus. Helposti nähdään, että $\| f \|_\infty$ on normi:

[1] tämä yleisempi käsite on joskus tarpeen; tällä kurssilla suhteellisen harvoin

Perustelu. Olkoon $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $t \in A$. Tällöin

$$|(f+g)(t)| = |f(t)+g(t)| \overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} |f(t)| + |g(t)| \overset{\text{määr.}}{\leq} \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

$$\underset{t \in A}{\overset{\text{sup yli}}{\Longrightarrow}} \| f+g \|_\infty = \sup_{t \in A} |(f+g)(t)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

eli ehto (N1) on voimassa. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin

$$|(af)(t)| = |af(t)| = |a||f(t)| \underset{\text{t:n}}{\overset{\text{sup yli}}{\Rightarrow}} \| af \|_\infty = |a| \| f \|_\infty$$

eli myös ehto (N2) on voimassa. Koska

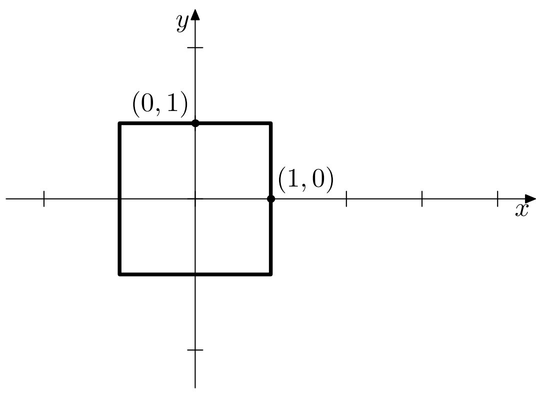
$$\begin{aligned} \| f \|_\infty = \sup_{t \in A} |f(t)| = 0 &\iff f(t) = 0 \quad \forall t \in A \\ &\iff f \text{ on } \bar{0}\text{-funktio} \end{aligned}$$

niin myös (N3) toteutuu. □

(3) Myös $\mathbb{R}^n$:ssä tai $\mathbb{C}^n$:ssä voidaan määritellä normi edellisen kohdan erikoistapauksena: tällöin $A = \{1, \dots, n\}$, jolloin saadaan normi

$$\| x \|_\infty := \sup(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

missä $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Vaikka tämä normi antaa entisen topologian, sup-normin "geometria" on hieman erilainen. Esimerkiksi dimensiossa $n = 2$ avaruuden $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ yksikköpallo $B_E = \{x : \| x \|_\infty \leq 1\}$ näyttää seuraavalta:



KUVA 3. Pallo B_E avaruudessa $E = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$

(4) Toinen erikoistapaus (2)-kohdasta saadaan, kun $A = \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$\ell^\infty := B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ \ (x_n)_{n=0}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \| x \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \ \}.$$

Koska vektorit $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \dots) \in \ell^\infty$ ovat lineaarisesti riippumattomia (Miksi ?), on $\dim(\ell^\infty) = \infty$.

Seuraavaksi osoitetaan pari normin perusominaisuutta, joista seuraavan lauseen (2)-kohta liittää normiavaruudet metrisiin.

2.4. **Lause.** *Olkoon* $(E, \|\cdot\|)$ *normiavaruus. Tällöin*

(1) kaikilla $x, y \in E$ *on voimassa*

$$\Big| \| x \| - \| y \| \Big| \leq \| x - y \|$$

eli ns. $\triangle -$ *ey"alaspäin". Erityisesti, kuvauksena normi* $x \mapsto \| x \|$ *on* tasaisesti *jatkuva* E*:ssa*

(2) kuvaus $d \colon E \times E \to \mathbb{R}_+$, $d(x, y) := \| x - y \|$ *on metriikka avaruudessa* E*. Erityisesti* $\| x \| = d(x, 0)$, $x \in E$.

Todistus.

(1) (vrt. Topo I, D II) Olkoon $x, y \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} \| x \| = \| x - y + y \| &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} \| x - y \| + \| y \| \\ &\Longrightarrow \| x \| - \| y \| \leq \| x - y \| \\ &\overset{\text{symm}}{\Longrightarrow} \| y \| - \| x \| \leq \| y - x \| \overset{\text{(N2)}}{=} \| x - y \| \\ &\Longrightarrow \Big| \| x \| - \| y \| \Big| \leq \| x - y \| \end{aligned}$$

(2) (vrt. Topo I) kaikilla $x, y, z \in E$ on voimassa

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \| x - z \| = \| x - y + y - z \| \overset{\text{(N1)}}{\leq} \| x - y \| + \| y - z \| \\ &= d(x, y) + d(y, z), \end{aligned}$$

joten (M1) toteutuu. Ehto (M2) seuraa välittömästi ehdosta (N2). Edelleen

$$d(x, y) = \| x - y \| = 0 \overset{\text{(N2)}}{\Longleftrightarrow} x - y = \bar{0} \Longleftrightarrow x = y,$$

joten myös (M3) on voimassa.

□

Metrisinä avaruuksina funktioavaruudet voivat olla melko "suuria", esimerkkinä olkoon vaikkapa ℓ^∞, joka ei ole edes separoituva (vrt. Harjoitukset) . Useille käytännössä eteen tuleville funktioavaruuksille separoituvuus toisaalta pätee; myöhemmin osoitamme tämän esimerkiksi $C(0, 1)$:lle.

Normiavaruuden luonnolliset rakenteet ovat yhteensopivat, toisin sanoen:

2.5. **Lause.** *Normiavaruudessa* $(E, \|\cdot\|)$ *ovat kuvaukset*

$$\psi_1 \colon E \times E \to E, \psi_1(a,b) := a + b$$

ja

$$\psi_2 \colon \mathbb{K} \times E \to E, \psi_2(\lambda, a) := \lambda a$$

jatkuvia.

Todistus. Harjoitukset 1. □

Huomautus. Normiavaruuden E metriikka on *siirto*- eli *translaatioinvariantti*: on siis voimassa, että

$$d(x+a, y+a) = d(x,y) \quad \text{kaikilla } \ x, y, a \in E$$

Tästä sekä ominaisuudesta (N2) seuraa, että $A \subset E$ on avoin (vast. suljettu, kompakti) *joss* $x_0 + A$ ja λA ovat avoimia (vast. suljettuja, kompakteja), missä $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ja $x_0 \in E$ ovat mielivaltaisia. Samoin joukko $U \subset E$, joka sisältää pisteen x_0 on pisteen x_0 ympäristö joss $U - x_0$ on nolla-alkion $\bar{0}$ ympäristö. Pistejono $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ suppenee alkioon $y \in E$ joss $x_n - y \to 0$ kun $n \to \infty$ avaruudessa E.

Edellä käytimme merkintöjä

$$\begin{aligned} x_0 + A &= \{\, x_0 + y : \ y \in A \,\} \subset E, \\ \lambda A &= \{\, \lambda x : \ x \in A \,\} \end{aligned}$$

Samoin määritellään, kun $A \subset E$, $B \subset E$ ja $\Lambda \subset \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} A + B &= \{\, x + y : \ x \in A, y \in B \,\}, \\ \Lambda A &= \{\, \lambda x : \ \lambda \in \Lambda, x \in A \,\} \end{aligned}$$

Huomautus. Monet funktioavaruuksien konvergenssikäsitteistä voidaan kuvata normin avulla (ja kääntäen, normi antaa konvergenssikäsitteen):

2.6. **Esimerkkejä.**

(1) Kun avaruus $C(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \ \text{ jatkuva } \}$ varustetaan tavallisella normillaan $\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$, pätee

$$\| f_n - f \|_\infty \to 0 \ \text{ kun } n \to \infty \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \quad \text{tasaisesti joukossa } [0,1]$$

(2) Toisaalta $C(0,1)$:ssä voidaan määritellä myös normi $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. (Selvitä itsellesi miksi $\|\cdot\|_1$ on normi $C(0,1)$:ssä !). Nyt pätee

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0 \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \text{ 'keskimäärin'}$$

Esimerkiksi, jos $f_n(x) = x^n$, niin $f_n \to 0$ 'keskimäärin' eli normin $\|\cdot\|_1$ mielessä, sillä $\| f_n \|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$. Toisaalta jono ei konvergoi sup-normin mielessä nollaan, sillä $\| f_n \|_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Annetuista normiavaruuksista saadaan muodostettua uusia avaruuksia monella eri tavalla. Tulemme jatkossa näkemään tästä useitakin esimerkkejä. Aloitamme seuraavalla yksinkertaisella periaatteella.

2.7. **Lause.** *Jokainen normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ vektorialiavaruus F on normiavaruus (E:n indusoimalla normilla varustettuna).*

2.8. **Esimerkkejä.**

(1) Voimme esimerkiksi valita $E = B([0,1], \mathbb{K})$, jolla on aliavaruutena jatkuvien funktioiden avaruus $F = C(0,1)$.

(2) Olkoon sitten $E = \ell^\infty$; seuraavat jonoavaruudet ovat sen vektorialiavaruuksia.

$$c := \{\, x = (x_n)_{n=0}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \lim x_n \text{ on olemassa, kun } n \to \infty \,\},$$

$$c_0 := \{\, x = (x_n)_{n=0}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \lim x_n = 0 \,\}.$$

Molemmissa normina toimii siis $\| x \|_\infty = \sup_n |x_n|$.

Joskus voi olla hyödyllistä muuttaa normia, ilman että sen määräämä topologia tai konvergenssi muuttuu. Tämä idea johtaa seuraavaan käsitteeseeen.

2.9. **Määritelmä.** Vektoriavaruuden E normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa vakiot $C_1, C_2 > 0$, joille

$$C_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2 \| x\|_1 \quad \forall x \in E$$

2.10. **Lause.** *Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ekvivalentteja normeja avaruudessa E. Tällöin ne määrittelevät avaruudessa E samat avoimet ja suljetut joukot (eli ne määrittävät saman topologian).*

Todistus. Harjoitukset 1 □

2.11. **Esimerkki.**

(1) Helposti nähdään, että $\mathbb{C}^n$:n normit

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

ovat ekvivalentit; jätämme lukijan tarkastettavaksi arviot $\| x \|_\infty \le \| x \|_2 \le \sqrt{n}\| x \|_\infty$, jotka pätevät jokaisella $x \in \mathbb{C}^n$. Itse asiassa, tulemme myöhemmin näkemään, että *äärellisulotteisen* vektoriavaruuden kaikki normit ovat ekvivalentit.

(2) Olkoon $\mathcal{P} = \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : a_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ polynomien muodostama vektoriavaruus. Tällöin esimerkiksi

$$\|p\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{ja} \quad \|p\|_2 = \max_k |a_k|$$

ovat hyvin määriteltyjä (Miksi?) normeja (Miksi?) avaruudessa $\mathcal{P}$. Normit eivät ole kuitenkaan ekvivalentteja: jos $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$, niin jokaisella n, $\|p_n\|_2 = 1$ mutta $\|p_n\|_1 = n$. Koska tässä n voidaan valita mielivaltaisen suureksi, normit ovat epäekvivalentit.

2.12. **Esimerkki.** Merkitään

$$C^k(0,1) = \{ f\colon [0,1] \to \mathbb{K} : \ f, f', \ldots, f^{(k)} \text{ ovat jatkuvia välillä } [0,1] \},$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Normit

$$\| f \| = \sup_{0\le j\le k} \sup_{0\le t\le 1} |f^{(j)}(t)|$$

ja

$$\| f \| = \sum_{j=0}^{k} \sup_{0\le t\le 1} |f^{(j)}(t)|$$

ovat ekvivalentteja avaruudessa $C^k(0,1)$, minkä todistus jää harjoitustehtäväksi.

ℓ^p-AVARUUDET

Normiavaruudet ℓ^∞, c ja c_0 ovat esimerkkejä klassisista Banachin avaruuksista. Mainitsemme vielä esimerkkinä avaruuden

$$\ell^1 = \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : \ \| x \|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \},$$

joka on *itseisesti* tai *absoluuttisesti suppenevien lukujonojen* avaruus. Myös tässä $\|\cdot\|_1$ on helppo todistaa normiksi. Vaikeammin käsiteltäviä esimerkkejä ovat muut ns. ℓ^p-avaruudet, joita nyt ryhdymme määrittelemään.

2.13. **Määritelmä.** Olkoon $1 \le p < \infty$. Tällöin

$$\ell^p := \{\ x = (x_n)_{n=0}^\infty : \ \|\, x\, \|_p := \Big(\sum_{n=0}^\infty |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty\ \}.$$

Seuraavassa p ja q ovat reaalilukuja, jotka täyttävät ehdot:

$$p > 1, \quad q > 1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sanomme lukuja p ja q toistensa *duaalieksponenteiksi*. Esimerkiksi $p = q = 2$ tai $p = 7$, $q = \frac{7}{6}$ ovat duaalieksponenttipareja. Edelleen on voimassa, että $q = \frac{p}{p-1}$ ja $p + q = pq$.

2.14. **Lemma.** *Jos $a \ge 0$, $b \ge 0$ ja p ja q ovat duaalieksponentteja, niin*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.15}$$

Todistus. Jos $a = 0$ tai $b = 0$, niin (2.15) on voimassa. Voimme olettaa: $a, b > 0$. Merkitään

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q},$$

kun $t > 0$. Tällöin $\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1}$, joten $\varphi'(t) < 0$, kun $0 < t < 1$ ja $\varphi'(t) > 0$, kun $t > 1$. Siispä φ saa pienimmän arvonsa, kun $t = 1$, eli kaikilla $t > 0$

$$1 = \varphi(1) \le \varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

Sijoitetaan $t = a^{1/q} b^{-1/p}$, jolloin saadaan

$$1 \le \frac{a^{p/q}}{pb} + \frac{b^{q/p}}{qa},$$

$$\iff ab \le \frac{a^{p/q+1}}{p} + \frac{b^{q/p+1}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

sillä $\frac{p}{q} + 1 = p$ ja $\frac{q}{p} + 1 = q$.

□

2.17. **Lause** (Hölderin epäyhtälö jonoille)**.** *Olkoot $1 < p, q < \infty$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^\infty |x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^\infty |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} \tag{H}$$

kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q$ *(tässä* $x_k, y_k \in \mathbb{K}$ *kaikilla* k *ja* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *tai* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*). Siis*

$$\| (x_k y_k) \|_1 \le \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q,$$

ja erityisesti $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q \Longrightarrow$ *tulojono* $(x_k y_k) \in \ell^1$.

Huomautus. Kun epäyhtälöön (H) sijoitetaan luvut, jotka toteuttaa lisäehdot $0 = x_k = y_k$ kaikilla $k > n$, saadaan erikoistapauksena äärellinen versio Hölderin epäyhtälöstä:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

kun $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $n = 1, 2, 3, \ldots$

Todistus. (Epäyhtälölle (H)):
Merkitään

$$A = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \| (x_k) \|_p, \quad B = (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} = \| (y_k) \|_q,$$

jolloin $A \ge 0, B \ge 0$. Jos $A = 0$ tai $B = 0$, niin $x_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ tai $y_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin (H) on ilmeinen, sillä vasen puoli $= 0$. Voidaan siis olettaa: $A > 0$, $B > 0$. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$ ja sovelletaan Lemmaa 2.14, kun $a = \frac{|x_k|}{A}$ ja $b = \frac{|y_k|}{B}$. Saadaan

$$\frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{B^q},$$

mikä on voimassa kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Summataan edelliset muuttujan k suhteen, jolloin

$$\frac{1}{AB} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \le \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|^q}{B^q}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^p} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}_{=A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{B^q} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q}_{=B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

joten kertomalla AB:llä puolittain, saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le AB = \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q.$$

□

Hölderin erikoistapauksella $p = q = 2$ on oma nimitys ja merkitys (vrt. Hilbertin avaruudet, luku 4).

2.18. **Seuraus** (Schwarzin epäyhtälö). *Jos* $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$, *niin*

$$\text{(S)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \| x \|_2 \| y \|_2$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. *Lisäksi äärellisten jonojen erikoistapauksessa saadaan*

$$\text{(S')} \qquad \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ *ja kaikilla* $n \in \mathbb{N}$.

Erityisesti, Schwarzin epäyhtälö takaa että avaruudessa ℓ^2 bilineaarimuoto

$$< x, y > = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \,, \qquad x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$$

on hyvin määritelty. Tämä antaa ℓ^2:een sisätulon struktuurin; tulemme näkemään Hilbertin avaruuksia koskevassa osaluvussa, että sisätuloavaruuksilla on monia "poikkeuksellisen hyviä" ominaisuuksia.

Hölderin epäyhtälön avulla voimme osoittaa, että ℓ^p-normit toteuttavat kolmioepäyhtälön; saatua arviota sanotaan (usein) *Minkowskin epäyhtälöksi.*

2.19. **Lause** (Minkowskin epäyhtälö). *Olkoon* $1 < p < \infty$. *Tällöin*

$$\text{(M)} \qquad (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$.

Erityisesti: Kun $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^p$, niin summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$, joten ℓ^p on siis vektoriavaruus. Valitsemalla $x_k = 0, y_k = 0$ kun $k \ge n + 1$ saadaan äärellinen versio:

$$\text{(M')} \qquad (\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$.

Todistus. Olkoon $1 < q < \infty$ sellainen, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (eli siis $q = \frac{p}{p-1}$). Hölderin epäyhtälön (H) ja $\mathbb{K}$:n kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{p-1} \underbrace{|x_k + y_k|}_{\le |x_k| + |y_k|} \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \\
&\overset{\text{(H)}}{\le} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Koska $q(p-1) = p$, niin edellinen epäyhtälö. voidaan kirjoittaa muodossa

$$\| (x_k + y_k) \|_p^p \le \big(\| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p \big) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Jakamalla saatu epäyhtälö puolittain termillä $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{q}} = \| (x_k + y_k) \|_p^{p/q}$ ja käyttämällä identiteettiä $p - p/q = 1$, saadaan

$$\| (x_k + y_k) \|_p = \| (x_k + y_k) \|_p^{p - p/q} \le \| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p,$$

joka on tarkalleen etsitty Minkowskin epäyhtälö (M).

Lisäys yllä olevaan todistukseen: Edellisessä todistuksessa on pieni ongelma; viimeisessä vaiheessa tehty jakaminen on mahdollista vain, jos

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p < \infty.$$

Pulman korjaamiseksi huomataan: Jos $\sum |x_k + y_k|^p = 0$, niin väite (M) on triviaali. Voidaan siis olettaa $\sum |x_k + y_k|^p > 0$. Epäyhtälöä $\sum |x_k + y_k|^p < \infty$ varten käytetään arviota

$$(*) \qquad |a + b|^p \le (|a| + |b|)^p \le (2 \max\{|a|, |b|\})^p \le 2^p (|a|^p + |b|^p),$$

mikä on voimassa kaikilla $a, b \in \mathbb{K}$. Kun sijoitetaan $a = x_k$, $b = y_k$ epäyhtälöön $(*)$ ja summataan yli muuttujan k saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \le 2^p \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big) < \infty,$$

koska $(x_k), (y_k) \in \ell^p$. Näin Lause 2.19 on saatu täydellisesti todistetuksi. $\square$

Huomautus. Erikoistapauksessa $p = 2$ äärellisiä jonoja koskeva epäyhtälö (M') on itse asiassa tuttu kolmioepäyhtälö kotiavaruuden $\mathbb{K}^n$ euklidiselle normille (DII, Topo I), sillä $\| x \|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, kun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Kootaan yhteen edelliset tulokset (tapaukset $p = 1$ tai ∞ käsiteltiin aikaisemmin) seuraavaksi tärkeäksi lauseeksi ℓ^p-avaruuksista.

2.20. **Lause.** *$(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ on normiavaruus kun $1 < p < \infty$.*

Todistus. Jos $x = (x_k) \in \ell^p, y = (y_k) \in \ell^p$ niin $x + y = (x_k + y_k)$ ja Minkowskin epäyhtälön 2.19 mukaan

$$\| x + y \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \| x \|_p + \| y \|_p$$

(ja erityisesti $x + y \in \ell^p$). Siis (N1) pätee. Koska

$$\| ax \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |ax_k|^p)^{\frac{1}{p}} = |a| (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = |a| \| x \|_p,$$

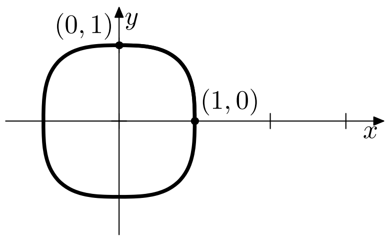
kun $x = (x_k) \in \ell^p, a \in \mathbb{K}$, niin myös homogeenisuusehto (N2) on voimassa. Edelleen

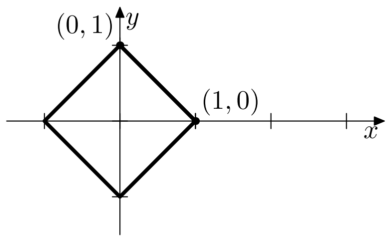
$$0 = \| (x_k) \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}) \Longrightarrow x_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow (x_k) = (0, 0, \ldots) = \bar{0},$$

joten myös (N3) toteutuu. □

Huomautus. ℓ^p-avaruuksien välillä pätevät seuraavat sisältyvyydet (joukkoina): $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty$ kun $1 < p < q < \infty$. Lisäksi $\| x \|_\infty \leq \| x \|_q \leq \| x \|_p \leq \| x \|_1$ kaikille jonoille $x = (x_k)$ (Harjoitukset 2).

Edellä olemme piirtäneet yksikköpallot normien $\| \cdot \|_2$ ja $\| \cdot \|_\infty$ suhteen. Entä yksikköpallo yleisten ℓ^p-normien suhteen ? Alla kuva tapauksesta $p = 3$ ja $p = 1$; mieti millainen on yksikköpallo yleisellä p !





Huomautus (Lisätietoja). On olemassa luontevia vektoriavaruuksia E, joissa on luonnollinen siirtoinvariantti topologia τ, joka kuitenkaan ei ole minkään E:n *normin* indusoima (ts. ei ole olemassa sellaista normia $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$, että $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$). Sellaisten avaruuksien teoriaa ei käsitellä kurssin aikana; esimerkkeinä mainitaan kuitenkin

(1) Varustetaan avaruus $C(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ jatkuva }\}$ topologialla τ, jossa jono $f_n \to f$, jos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Topologia τ saadaan kasvavasta *seminormiperheestä* $(\|\cdot\|_m)$, kun

$$\| f \|_m = \sup_{x\in K_m} |f(x)|,$$

$f \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $K_m = [-m, m]^n \subset \mathbb{R}^n$, sekä $m \in \mathbb{N}$. Konvergenssia ei kuitenkaan voi kuvata vain yhden normin $\|\cdot\|$ avulla. Topologinen vektoriavaruus $(C(\mathbb{R}^n), \tau)$ on ns. *nukleaarinen Frechet'n* avaruus.
Vastaava koskee myös äärettömästi derivoituvien funktioiden avaruutta $C^\infty(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K},\ \ f^{(j)} \text{ jatkuva jokaisella } j \in \mathbb{N}\}$.

(2) Olkoon $0 < p < 1$. Määritellään: jono $x = (x_k) \in \ell^p$, jos

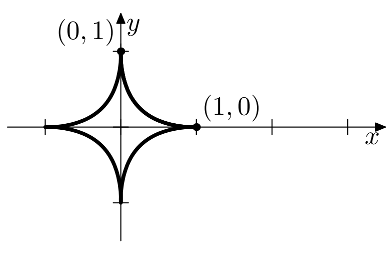
$$\| x \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Tällöin $x \mapsto \| x \|_p$ toteuttaa normin ehdot (N2) ja (N3) sekä kolmioepäyhtälön muodossa

$$\| x + y \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}-1}(\| x \|_p + \| y \|_p)$$

kaikilla $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell^p$. Tässä $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$, kun $0 < p < 1$, eli $\|\cdot\|_p$ on ns. *kvasinormi* ℓ^p:ssä.

Alla kuva "yksikköpallosta" $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p \le 1\}$, kun $p = 1/2$.



Huomautus. Jokaisessa normiavaruudessa yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \| x \| \le 1\}$ on konveksi, so. jos $x, y \in B_E$, niin $tx + (1-t)y \in B_E$

kaikilla $0 < t < 1$; nimittäin $\| tx + (1-t)y \| \le t\| x \| + (1-t)\| y \| \le 1$. Siispä myöskään yo. kuvan mukaan $\| \cdot \|_p$ ei voi olla normi: vastaava yksikköpallo ei ole konveksi.

(3) Kaikkien jonojen avaruus

$$s = \{ \ (x_n) : \ x_k \in \mathbb{K} \text{ jokaisella } k \in \mathbb{N} \ \}.$$

Avaruudessa s on summa ja skalaarilla kertominen määritelty kuten ℓ^p:ssä, ja metriikka

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

kun $x = (x_k), y = (y_k) \in s$. Voidaan osoittaa, että d on siirtovariantti metriikka (HT). Avaruus s on myös nukleaarinen Frechet'n avaruus.

Lineaariset operaattorit

Olkoon E ja F vektoriavaruuksia. Kuvaus $T : E \to F$ on *lineaarinen* jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Sanomme usein että T on *lineaarinen operaattori.* Usein myös merkitsemme lyhyesti Tx, merkinnän $T(x)$ sijaan.

Äärellisulotteisessa normiavaruudessa kaikki lineaariset kuvaukset ovat jatkuvia, mutta äärettömän monen dimension avulla jatkuvuus on helppo rikkoa (annamme esimerkin hieman myöhemmin). Jos E, F ovat normiavaruuksia, on siis luonnollista kysyä:

Koska lineaarinen kuvaus $T : E \to F$ on jatkuva ??

Vastausta varten tarvitsemme uuden käsitteen, rajoitetut operaattorit.

2.21. **Määritelmä.** Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T : E \to F$ lineaarinen. Sanomme, että T on *rajoitettu*, jos on vakio $C < \infty$ jolle

$$\|Tx\|_F \le C \, \|x\|_E \qquad \text{kaikilla } x \in E.$$

Yleisesti sanotaan että normiavaruuden osajoukko $A \subset E$ on rajoitettu, jos $\sup\{\|x\| : x \in A\} \le M < \infty$; yhtäpitävästi (Miksi?), A:n halkaisija on äärellinen. Kuten Harjoituksissa 2 nähdään, lineaarinen kuvaus T on rajoitettu jos ja vain jos se kuvaa E:n rajoitetut joukot F:n rajoitetuiksi joukoiksi.

2.22. **Esimerkki.** Olkoon $E = F = \ell^2$ ja $T : E \to F$ kuvaus $T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (3x_{k+1})_{k=1}^\infty$ kun $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$. Tällöin T on lineaarinen (Miksi?) ja rajoitettu:

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^\infty |3x_{k+1}|^2\right)^{1/2} = 3\left(\sum_{k=1}^\infty |x_{k+1}|^2\right)^{1/2} \le 3\left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{1/2} = 3\|x\|_2$$

Huomaamme, että vaadituksi vakioksi voidaan ottaa $C = 3$.

Operaattorin rajoittuneisuus voidaan myös testata seuraavan suureen avulla; nimittäin (Harjoitukset) T on rajoitettu jos ja vain jos

$$\|T\| := \sup\{\, \|Tx\| : x \in E,\ \|x\| \le 1\} < \infty \tag{2.23}$$

Niinkuin merkintä jo vihjaa, saatua suuretta kutsutaan lineaarisen kuvauksen T *normiksi.* Se mittaa kuinka suureksi joukoksi T kuvaa yksikköpallon $B_E = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$.

Siis operaattori T on rajoitettu jos ja vain jos normi $\|T\| < \infty$. Jos tarve vaatii, merkitsemme avaruudet E ja F näkyviin, so. $\|T\|_{E\to F}$.

Huomautus. Koska $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ jokaisella vektorilla $x \in E$, nähdään että

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \|T\| \quad \text{kaikilla } x \in E$$

Siis saamme

$$\|Tx\| \le \|T\|\|x\| \tag{2.24}$$

jokaisella vektorilla $x \in E$ ja lineaarikuvauksella $T : E \to F$.
[vrt. myös Harjoitukset 2, tehtävä 3 c)].

2.25. **Esimerkkejä.** a) Olkoon $E = \ell^2$ ja $F = \ell^1$ sekä

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^\infty := \left(\frac{1}{k}x_k\right)_{k=1}^\infty$$

Onko T rajoitettu (operaattorina $T : \ell^2 \to \ell^1$) ? Heti havaitaan että

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}|x_k|$$

mutta helppo arvio $\sum_{k=1}^\infty |x_k| \le \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{1/2}$ ei ole yleisesti totta. Voimme kuitenkin käyttää Hölderin epäyhtälöä kun $p = q = 2$,

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}|x_k| \le \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{1/2} = C\|x\|_2$$

missä $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2} < \infty$. (Itse asiassa, $C = \sqrt{\pi^2/6}$). Näin ollen $T : \ell^2 \to \ell^1$ on rajoitettu ja saamme normille arvion $\| T \| \leq \sqrt{\pi^2/6}$.

b) Rakennetaan sitten lineaarinen operaattori, joka *ei* ole rajoitettu. Voimme vaikkapa tarkastella avaruutta $\mathcal{P} \;=\; \{\, p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k :\; a_k \in \mathbb{C},\; n \in \mathbb{N} \,\}$, joka muodostuu kaikista polynomeista; varustetaan se normilla $\|p\| = \max\{|a_k|\}$. Tällöin, esimerkiksi, (derivaatta)kuvaus $T\colon \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, z^k$ on lineaarinen (Miksi?), mutta ei rajoitettu: Jos $p_n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, silloin

$$\| p_n \| = 1, \quad \| Tp_n \| = n \;\;\Rightarrow\;\; \sup\{\| Tp \| : \| p \| = 1, p \in \mathcal{P}\} \;=\; \infty.$$

Palataan sitten alkuperäiseen kysymykseemme, milloin lineaarinen kuvaus on jatkuva ? Käy ilmi, että lineaarinen operaattori on jatkuva täsmälleen silloin kun se on rajoitettu !

2.26. **Lause.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *T on rajoitettu operaattori*
(ii) *T on jatkuva (koko E:ssä)*
(iii) *T on jatkuva* yhdessä *pisteessä $x_0 \in E$.*

Todistus. (i) $\Rightarrow$ (ii): jos $x, y \in E$ ja $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\| Tx - Ty \| \overset{\text{T lin.}}{=} \| T(x-y) \| \leq \| T \| \cdot \| x - y \| < \varepsilon \quad \text{kun} \quad \| x - y \| \leq \frac{\varepsilon}{\| T \|}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): ilmeinen
(iii) $\Rightarrow$ (i): Olkoon T jatkuva x_0:ssa. Jos $\varepsilon > 0$ annettu, voimme valita sellaisen luvun $\delta > 0$ että aina

$$\| x - x_0 \| \leq \delta \Rightarrow \| Tx - Tx_0 \| < \varepsilon$$

Jos nyt $x \in E$ ja $\| x \| < \delta$, saadaan

$$\| Tx \| \underset{\text{T lin.}}{=} \| T(x + x_0) - Tx_0 \| < \varepsilon.$$

Toisaalta, jos $x \in B_E$, on $\| \delta x \| = \delta \| x \| \leq \delta$ ja siis

$$\delta \| Tx \| = \| T(\delta x) \| < \varepsilon, \quad \text{eli} \quad \| Tx \| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall x \in B_E$$

Olemme näin näyttäneet: T on rajoitettu. $\square$

Erityisesti, näemme, että Esimerkki 2.25 b) antaa lineaarisen operaattorin, joka ei ole jatkuva.

Näillä tiedoin voimme myös aloittaa johdannossa esitetyn integraalioperaattorin tarkemman tarkastelun. Tulemme palaamaan teemaan useasti myöhemminkin.

2.27. **Esimerkki.** Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ jatkuva. Kun $f \in C(0,1)$, muunnamme sen uudeksi funktioksi Tf, missä

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s)f(s)ds, \qquad x \in [0,1]$$

Väite: näin saadaan jatkuva lineaarinen operaattori $T : C(0,1) \to C(0,1)$. Meidän siis on osoitettava kolme asiaa,

1. $f \mapsto Tf$ on lineaarinen,
2. Tf on jatkuva funktio aina kun f on jatkuva välillä $[0,1]$, ja
3. operaattorina T on rajoitettu $C(0,1) \to C(0,1)$.

Jätetään 1. väite lukijan tehtäväksi. Väite 2. kertoo että todellakin $T\big(C(0,1)\big) \subset C(0,1)$. Sitä varten arvioidaan

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &= \Big| \int_0^1 K(x,s)f(s)ds - \int_0^1 K(y,s)f(s)ds \Big| \\ &\leq \int_0^1 \big|K(x,s) - K(y,s)\big|\,|f(s)|ds \end{aligned}$$

Funktion Tf:n jatkuvuus siis palautuu K:n ominaisuuksiin. Heti kuitenkin huomataan, että pelkkä pisteittäinen K:n jatkuvuus ei riitä, vaan arvio pitää tehdä tasaisesti s:n suhteen. Tarvitsemme siis hieman tietoja Topologian kurssilta: Oletamme tunnetuksi, että kompaktissa joukossa määritelty jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva[2] .

Sovellamme tätä ytimeen $K(x,s)$. Koska $[0,1] \times [0,1]$ on kompakti, jokaisella $\varepsilon > 0$ löydämme δ:n niin että jos $|x - y| < \delta$ eli $\;|(x,s) - (y,s)| < \delta,\;$ silloin

$$|K(x,s) - K(y,s)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } s \in [0,1] \tag{2.28}$$

Erityisesti, vaaditun δ:n suuruus ei riippunut pisteestä s. Saamme siksi

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \varepsilon \int_0^1 |f(s)|ds \leq \varepsilon \| f \|_\infty, \quad \text{kun } |x - y| < \delta \tag{2.29}$$

Koska ε oli mielivaltainen, olemme osoittaneet Tf:n jatkuvuuden (väite 2).

Myös väite 3. käyttää topologista tulosta: Koska K on jatkuva kompaktissa joukossa $[0,1] \times [0,1]$, se saa siinä suurimman arvonsa, ja erityisesti K on rajoitettu. Siis eräällä vakiolla $M < \infty$,

$$|K(x,s)| \leq M < \infty \quad \text{kaikilla } x, s \in [0,1]$$

[2]Funktio $g : A \to \mathbb{C}$ on *tasaisesti jatkuva* jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy $\delta > 0$ niin että $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Olennaista tässä siis että vaadittu δ riippuu vain etäisyydestä $\|x - y\|$, eikä siitä missä pisteet x, y sijaitsevat.

Näin voimme arvioida

$$|(Tf)(x)| \leq \int_0^1 |K(x,s)|\,|f(s)|ds \leq M\|\,f\,\|_\infty$$

mikä antaa $\|\,Tf\,\|_\infty \leq M\|\,f\,\|_\infty$. Näin ollen T on rajoitettu operaattori; itse asiassa voimme valita $M = \|\,K\,\|_\infty$ ja siis saamme arvion $\|\,T\,\| \leq \|\,K\,\|_\infty$.

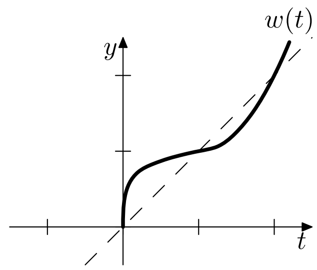
Olemme siten todistaneet viimeisenkin väitteen 3. $\square$

2.30. *Huomautus.* Yllä esitetty integraalioperaattorin jatkuvuuden todistus antaa hieman enemmänkin kuin mitä Esimerkki 2.27 tarvitsi: Havaitaan että Tf:n jatkuus riippuu olennaisesti vain ytimestä K eikä niinkään funktiosta f.

Koska tällä havainnolla on käyttöä myöhemmin, formalisoidaan sitä hieman, käyttäen jatkuvuusmodulin käsitettä: Olkoon meillä $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ jolle

$$t \mapsto w(t) \text{ jatkuva, aidosti kasvava ja } w(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Sanomme silloin että w on *jatkuvuusmoduli.*



Nimittäin, jos funktiolle $g : A \to \mathbb{C}$ pätee

(2.31) $$|g(x) - g(y)| \leq w(\|x-y\|) \quad \text{kaikilla } x, y \in A$$

niin w kertoo "kuinka" jatkuva g on. [Tyypillinen esim: $w(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$]

Jos g:llä on jatkuvuusmoduli joukossa A, eli (2.31) pätee, se on selvästikin tasaisesti jatkuva (Miksi?). Mutta pätee myös kääntäen, jokaisella tasaisesti jatkuvalla funktiolla on jatkuvuusmoduli. Voimme nimittäin asettaa

$$w_0(t) = \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in A, \|x-y\| \leq t\}$$

Tasaisen jatkuvuuden nojalla w_0 on jatkuva ja $w_0(t) \to 0$ kun $t \to 0$. Aidosti kasvava siitä saadaan määrittelemällä $w(t) = w_0(t) + t$. Tälle (2.31) selvästi pätee, ja siten g:llä on jatkuvuusmoduli w.

Jos palaamme Esimerkkiin 2.27, ytimellä K on ylläolevan nojalla jatkuvuusmoduli w_K. Lisäksi, arviot (2.28), (2.29) antavat

(2.32) $$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq w_K(x-y)\|\,f\,\|_\infty \leq w_K(x-y)$$

mikäli $\|\,f\,\|_\infty \leq 1$, eli $f \in B_E, \quad E = C(0,1)$. Toisin sanoen, oli f:n jatkuvuus miten heikkoa tahansa, Tf:n jatkuvuus on aina vähintään luokkaa w_K !

3. Täydellisyys ja Banachin avaruus

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ (varustettuna normilla $|x-y|$) eroaa ratkaisevasti rationaalilukujen joukosta $\mathbb{Q}$ seuraavan ominaisuutensa perusteella: reaalilukujono x_n suppenee joss (x_n) on Cauchyn jono. Tätä reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ominaisuutta sanotaan täydellisyydeksi. Toisena esimerkkinä mainitaan avaruus

$$E = \{ \, f : [0,1] \to \mathbb{R} : \; f \text{ on Riemann-integroituva} \, \}$$

varustettuna seminormilla

$$\| \, f \, \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E.$$

Avaruus $(E, \| \cdot \|_1)$ ei ole täydellinen (todistus sivuutetaan); tämä puute oli eräs keskeisistä syistä Lebesgue integraalin käyttöönottoon ja kehittämiseen.

Yleisemmällä tasolla, (esim. differentiaali)yhtälöitä ratkaistaan tyypillisesti hakemalla approksimatiivisia ratkaisuja, ja lähes säännöllisesti funktioavaruuksilta vaaditaan täydellisyyttä, jotta approksimatiivisille ratkaisuille löydetään jokin rajafunktio.

3.1. **Määritelmä.** Normiavaruuden $(E, \| \cdot \|_1)$ jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| \, x_k - x_j \, \| < \varepsilon$$

aina kun $k \geq m_\varepsilon$ ja $j \geq m_\varepsilon$.

Huomautus. Kun tarkastellaan jonon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ määräämiä joukkoja $A_m = \{ \, x_n : \; n \geq m \, \}$, missä $m = 1, 2, \ldots$ ja huomataan näiden halkaisijoitten $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \| \, x - y \, \|$ avulla, että:

(x_n) on Cauchyn jono $\Leftrightarrow$ $\lim_{m \to \infty} \operatorname{diam}(A_m) = 0$.

Seuraavat kolme lausetta kertovat Cauchy jonojen perusominaisuudet.

3.2. **Lause.** *Normiavaruuden E suppeneva jono (x_n) on aina Cauchyn jono.*

Todistus. Olkoon $\lim x_n = y$ eli $\lim \| \, x_n - y \, \| = 0$. Jos $\varepsilon > 0$, on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| \, x_n - y \, \| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq m_\varepsilon.$$

Siis kun j, $k \geq m_\varepsilon$, niin $\| \, x_k - x_j \, \| \overset{\Delta - ey}{\leq} \| \, x_k - y \, \| + \| \, y - x_j \, \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Toisaalta,

3.3. **Lause.** *Normiavaruuden E Cauchy jono (x_n) on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $(x_n) \subset E$ Cauchy jono ja $A_m = \{ x_n : \ n \geq m \}$. Koska (x_n) on Cauchy jono, niin on olemassa sellainen $m_0 \in \mathbb{N}$, että $\operatorname{diam}(A_{m_0}) < 1$. Jos $y \in A_{m_0}$, niin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\| y \| \overset{\Delta - ey}{\leq} \| y - x_{m_0} \| + \| x_{m_0} \| < 1 + \| x_{m_0} \|.$$

Siispä täyden jonon vektoreille saamme arvion

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \| x_n \| \leq \max\{ \| x_1 \|, \| x_2 \|, \dots, \| x_{m_0 - 1} \|, 1 + \| x_{m_0} \| \} < \infty.$$

□

Lopuksi hyödyllinen riittävä ehto Cauchyn jonon suppenemiselle.

3.4. **Lause.** *Jos normiavaruuden E Cauchyn jonolla (x_n) on osajono, joka suppenee kohti vektoria $y \in E$, niin myös koko jonolle on* $\lim x_n = y$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan Cauchyn ehdosta sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_k - x_j \| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ kaikilla } k, j \geq m_\varepsilon.$$

Jos (x_{n_j}) on sellainen osajono, jolle $\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = y$, niin kaikilla riittävän suurilla indekseillä $j \in \mathbb{N}$ on $n_j \geq m_\varepsilon$ ja $\| x_{n_j} - y \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$\| x_n - y \| \leq \| x_n - x_{n_j} \| + \| x_{n_j} - y \| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kaikilla $n \geq m_\varepsilon$. Siis $\lim x_n = y$. □

Alamme sitten tarkastelemaan täydellisiä normiavaruuksia.

3.5. **Määritelmä.** Normiavaruus $(E, \| \cdot \|)$ on *täydellinen*, jos avaruuden E jokainen Cauchyn jono (x_n) suppenee avaruudessa E (siis on olemassa sellainen $y \in E$, että $\lim x_n = y$).

Täydelliset normiavaruudet ovat funktioanalyysin keskeinen tutkimuskohde ja työkalu, joten näille on otettu käyttöön oma nimi (puolalaisen Stefan Banach'in (1892-1945) mukaan, joka merkittävällä tavalla kehitti alaa).

3.6. **Määritelmä.** Täydellistä normiavaruutta $(E, \| \cdot \|)$ sanotaan *Banachin avaruudeksi* (usein sanomme lyhyesti: E on Banachin avaruus).

Selvitetään seuraavaksi mitkä edellisessä luvussa löydetyistä avaruuksista ovat täydellisiä, ja erityisesti, kuinka käytännössä näytetään että annettu normiavaruus on täydellinen. Olkoon siis ensin $A \neq \emptyset$ joukko ja

$$B(A, \mathbb{K}) = B(A) := \{ x : A \to \mathbb{K} : \ x \text{ rajoitettu kuvaus} \},$$

varustettuna normilla

$$\| x \|_\infty = \sup_{t\in A} |x(t)|, \quad \text{kun } x \in B(A, \mathbb{K})$$

3.7. **Lause.** $(B(A,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ *on Banachin avaruus.*

Todistus. Todistus perustuu skalaarikunnan $\mathbb{K}$ täydellisyyteen. Nimittäin, olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa $B(A,\mathbb{K})$ ja $t \in A$ mielivaltainen. Koska

$$|x_k(t) - x_j(t)| \leq \| x_k - x_j \|_\infty < \varepsilon \quad \text{kaikilla } j, k \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

kun indeksit $k, j \geq m_\varepsilon$ ovat riittävän suuria, on skalaarijono $(x_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyn jono skalaarikunnassa $\mathbb{K}$. Tällöin on siis olemassa raja-arvo $\lim x_n(t) \in \mathbb{K}$, sillä metriset avaruudet $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ovat täydellisiä. Pitämällä $t \in A$ muuttujana saadaan raja-arvosta kuvaus $y : A \to \mathbb{K}$,

$$y(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t), \quad t \in A.$$

Lauseen väite seuraa osoittamalla seuraavat apuväiteet:

(i) kuvaus $y \in B(A,\mathbb{K})$ eli y on rajoitettu kuvaus,

(ii) $\| x_n - y \|_\infty \to 0$, kun $n \to \infty$ eli $x_n \to y$ avaruudessa $B(A,\mathbb{K})$

Tätä varten, olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, ja käytetään arviota (3.8), joka pätee *tasaisesti* jokaisella $t \in A$. Pidetään siinä $k \geq m_\varepsilon$ sekä $t \in A$ kiinteinä, ja annetaan $j \to \infty$. Silloin

$$\lim_{j\to\infty} |x_k(t) - x_j(t)| = |x_k(t) - y(t)|,$$

koska yo. tarkastelee vain skalaarilukuja $x_j(t)$. Epäyhtälön (3.8) säilyminen rajalla takaa, että

$$|x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{kun } t \in A \tag{3.9}$$

ja $k \geq m_\varepsilon$. Tästä saadaan ensinnäkin että

$$|y(t)| \leq |y(t) - x_k(t)| + |x_k(t)| \leq \varepsilon + \| x_k \|_\infty \;\text{ kun } t \in A$$

eli että $y \in B(A,\mathbb{K})$. Toiseksi (3.9) pätee tasaisesti, so. samalla ε jokaisessa pisteessä $t \in A$, Saadaan siis

$$\| x_k - y \|_\infty = \sup_{t\in A} |x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \;\text{ kaikilla } k \geq m_\varepsilon$$

Olemme näin näyttäneet, että $\lim x_k = y$ avaruudessa $B(A,\mathbb{K})$, eli suppeneminen tapahtuu ko. avaruuden *normin* suhteen.

Ylläolevat argumentit yhdistäen nähdään että $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. $\square$

3.10. **Seuraus.**

a) vektoriavaruus $\mathbb{K}^n$ *varustettuna metriikalla*

$$\| x \|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|$$

on Banachin avaruus.

b) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *on Banachin avaruus.*

Annetaan myös esimerkki *epätäydellisestä* normiavaruudesta.

3.11. **Esimerkki.** $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole täydellinen normiavaruus, kun

$$\| (x_k) \|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \quad (x_k) \in \ell^1.$$

Ratkaisu: Olkoon $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Selvästi $x^{(n)} \in \ell^1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} \| x^{(n)} - x^{(n+p)} \|_\infty &= \| (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ kpl}}, \tfrac{1}{n+1}, \ldots, \tfrac{1}{n+p}, 0, 0, \ldots) \|_\infty \\ &= \sup_{n+1\le j\le n+p} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \to \infty$. Siispä $(x^{(n)})$ Cauchyn jono avaruudessa $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$.

Väite epätäydellisyydestä seuraa, kun osoitetaan, että ei ole olemassa sellaista jonoa $y = (y_k) \in \ell^1$, että

$$\lim_{n\to\infty} \| x^{(n)} - y \|_\infty = 0.$$

Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että löytyisi sellainen $y = (y_k) \in \ell^1$, että $x^{(n)} \to y$ sup-normissa. Jonon $(x^{(n)})$ alkioiden k :nnet koordinaatit $x_k^{(n)}$ ovat muotoa

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

ja kaikilla indekseillä $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_k^{(n)} - y_k| \le \| x^{(n)} - y \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siksi

$$y_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

kun $k = 1, 2, \ldots$. Toisaalta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \text{ eli } y = \left(\tfrac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \notin \ell^1,$$

mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ on epätäydellinen. $\square$

Huomautus. Vastaavalla tavalla osoitetaan (Tee se !) että jos $1 \leq p < q < \infty$, niin $\ell^p \subset \ell^q$ mutta $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ei ole täydellinen.

Huomautus. Polynomien muodostama normiavaruus

$$\mathcal{P} = \{\, p\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \ p \text{ polynomi} \,\}$$

varustettuna sup-normilla

$$\|\, p \,\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$$

ei ole täydellinen. Samoin, jos $\mathcal{P}$ varustetaan luvun 2 Esimerkin 2.11 kohdassa (2) annetuilla normeilla, osoittautuu että $\mathcal{P}$:stä ei tule täydellistä. Epätäydellisyyden todistus on samantapainen kuin edellisessä Esimerkissä (vrt. Harjoitukset).

Seuraavan tuloksen avulla saadaan lisää esimerkkejä Banachin avaruuksista.

3.12. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus ja $M \subset E$* suljettu *aliavaruus. Tällöin M on täydellinen eli Banachin avaruus, avaruuden E indusoimassa normissa.*

Todistus. Jos $(x_n) \subset M$ on Cauchyn jono avaruudessa M, niin (x_n) on myös avaruuden E Cauchyn jono. Koska E täydellinen, niin on olemassa sellainen raja-alkio $y \in E$, että $\lim x_n = y$. Koska M on suljettu ja $x_n \in M$ kaikilla n, niin raja $y \in M$, joten M on täydellinen. □

Edellinen tulos pätee myös käänteiseen suuntaan:

3.13. **Lause.** *Normiavaruuden E täydellinen aliavaruus M on suljettu avaruudessa E.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Tällöin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, että $x_n \in M$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ ja $\lim x_n = z$. Tällöin $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa E Lauseen 3.2 nojalla ja siten myös avaruudessa M, joten avaruuden M täydellisyyden nojalla $\lim x_n = y \in M$ on olemassa. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $z = y \in M$, joten siis $\overline{M} = M$ ja M on suljettu avaruudessa E. □

3.14. **Seuraus.** *Olkoon M Banachin avaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on täydellinen (eli Banachin avaruus) $\Leftrightarrow$ M on suljettu.*

Todistus. Seuraa välittömästi Lauseista 3.12 ja 3.13. □

Käytämme seuraavaksi näitä tietoja tutkimaan jatkuvien kuvausten avaruuksia.

3.15. **Esimerkki.** Olkoon X *topologinen* avaruus, ja

$$C(X) = C(X, \mathbb{K}) := \{ \, f : X \to \mathbb{K} : \; f \text{ jatkuva avaruudessa } X \, \}.$$

Jos $f, g \in C(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin pisteittäinen summafunktio $f + g \in C(X)$ ja $\lambda f \in C(X)$ eli $C(X)$ on vektoriavaruus. Merkitään

$$BC(X) = BC(X, \mathbb{K}) := B(X, \mathbb{K}) \cap C(X),$$

eli jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten $X \to \mathbb{K}$ avaruus. Siis $BC(X)$ on avaruuden $B(X)$ on vektorialiavaruus.

Kysymys. Onko $BC(X) \subset B(X)$ suljettu (normin $\| \cdot \|_\infty$ suhteen)?

Olkoon $t \in X$ kiinteä, ja

$$BC_t(X) = \{ \, f \in B(X) : \; f \text{ on jatkuva pisteessä } t \, \}.$$

Huomautus. (Topo I) $f : X \to \mathbb{K}$ on jatkuva pisteessä $t \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen avoin ympäristö V, $t \in V \subset X$, että

$$|f(u) - f(t)| < \varepsilon \text{ kaikilla } u \in V.$$

3.16. **Lemma.** *$BC_t(X)$ on avaruuden $B(X)$ suljettu vektorialiavaruus kaikilla $t \in X$.*

Todistus. Olkoon $g \in B(X)$ sellainen funktio $X \to \mathbb{K}$, että g sisältyy avaruuden $BC_t(X)$ sulkeumaan sup-normin $\| \cdot \|_\infty$ suhteen. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $f \in BC_t(X)$, että $\| \, g - f \, \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä t, niin löytyy sellainen avoin ympäristö $t \in V \subset X$, että

$$|f(t) - f(u)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ kaikilla } u \in V.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |g(t) - g(u)| &\le \underbrace{|g(t) - f(t)|}_{\le \| \, g - f \, \|_\infty} + |f(t) - f(u)| + \underbrace{|f(u) - g(u)|}_{\le \| \, g - f \, \|_\infty} \\ &\le 2 \underbrace{\| \, g - f \, \|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

kaikilla $u \in V$. Siis g on jatkuva pisteessä t, joten $g \in BC_t(X)$ ja siis $BC_t(X)$ on suljettu. □

3.17. **Lause.** *$(BC(X), \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Koska f on jatkuva avaruudessa X joss f on jatkuva kaikissa pisteissä $t \in X$, niin

$$BC(X) = \bigcap_{t \in X} BC_t(X),$$

missä $BC_t(X)$ on suljettu kaikilla $t \in X$ Lemman 3.16 nojalla. Siis $BC(X)$ on suljettu aliavaruus avaruudessa $B(X)$. Nyt väite seuraa Lauseista 3.7 ja 3.12. □

3.18. **Seuraus.** *Jos X on kompakti topologinen avaruus, niin $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. Erityisesti $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Käytetään Topo I:n tulosta jonka mukaan kompaktissa avaruudessa X jokainen jatkuva kuvaus $f : X \to \mathbb{K}$ on rajoitettu, eli $C(X) = BC(X)$. □

Esimerkin 2.8 kohdassa (2) esiteltiin avaruuden ℓ^∞ aliavaruudet c ja c_0.

$$c := \{\, x = (x_n)_{n=0}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \lim x_n \text{ on olemassa, kun } n \to \infty \,\},$$
$$c_0 := \{\, x = (x_n)_{n=0}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \ \lim x_n = 0 \,\}.$$

3.19. **Lause.** *c ja c_0 ovat Banachin avaruuksia.*

Todistus.

1) $c_0 \subset \ell^\infty$ on *suljettu* vektorialiavaruus (Harjoitukset 1)
2) $c \subset \ell^\infty$ on suljettu:
   Olkoon $x = (x_k) \in \ell^\infty$ sellainen jono, että $x \in \overline{c}$. Kun $\varepsilon > 0$, niin löytyy sellainen jono $y = (y_k) \in c$, että
   $$\| x - y \|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$
   Koska (y_k) on suppeneva jono, niin erityisesti (y_k) on skalaarikunnan $\mathbb{K}$ Cauchyn jono. Siis on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että
   $$|y_j - y_k| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$
   kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Tällöin
   $$\begin{aligned} |x_j - x_k| &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} |x_j - y_j| + |y_j - y_k| + |y_k - x_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$
   kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $x = (x_k)$ on myös skalaarikunnan $\mathbb{K}$ Cauchyn jono. Siispä (x_k) suppenee, joten $x \in c$. Siis $c = \overline{c}$ on suljettu, joten Lauseen 3.12 nojalla c on Banachin avaruus.

□

Huomautus. Olkoon $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja varustetaan se topologialla τ, jonka kantana ovat joukot

$$U = \{n\} \quad \text{ja} \quad V = \{\infty\} \cup \{\, k \in \mathbb{N} : \ k \geq m \,\}, \quad \text{missä } n, m \in \mathbb{N}.$$

Saatu avaruus $(\overline{\mathbb{N}}, \tau)$ on $\mathbb{N}$:n yhden pisteen kompaktifiointi. Tällöin itse asiassa $c = C(\overline{\mathbb{N}})$. Siten Lause 3.19 seuraa myös Seurauksesta 3.18.

Vektoriarvoisista sarjoista

Olkoon E normiavaruus ja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono avaruudessa E. Mietimme seuraavaksi vastaavan vektorisarjan $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ summautumista. Toisin sanoen, pätevätkö tutut sarjateorian perusteet myös äärettömän dimension tapauksessa ?

Sarjaa merkitään tavallisesti symbolilla $\sum_k x_k$ tai $\sum x_k$. Osasummille käytetään myös tuttuja merkintöjä,

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}. \quad (s_n \in E \quad \forall n.)$$

Edelleen, alkio $x_k \in E$ on sarjan k:s *termi*.

3.20. **Määritelmä.** Olkoon $\sum x_k$ normiavaruuden E alkioiden muodostama sarja. Mikäli osasummien jono (s_n) suppenee kohti vektoria $s \in E$, eli

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n - s \| = 0,$$

sanotaan että sarja $\sum_k x_k$ *suppenee* ja sen *summa* on s; merkitään tällöin

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Sanotaan, että E:n sarja $\sum_k x_k$ on *normisuppeneva* (tai *absoluuttisesti* suppeneva), jos ($\mathbb{R}$-terminen) sarja $\sum_k \| x_k \|$ suppenee.

3.21. **Esimerkki.** Olkoon $e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \ldots) \in \ell^2$, kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ ℓ^2:ssä?

Ratkaisu: Olkoon $x = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Nyt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

joten $x \in \ell^2$. Tällöin $\sum \frac{e_n}{n} = x$ ja kyseinen sarja suppenee, sillä sarjan m:s osasumma s_m on

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{e_n}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots)$$

ja siis

$$\| x - s_m \|_2 = \| (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{mkpl}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots) \|_2 = \Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \Big)^{1/2} \to 0,$$

kun $m \to \infty$; kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi. Kuitenkaan sarja $\sum \frac{e_n}{n}$ *ei ole* normisuppeneva avaruudessa ℓ^2, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{e_n}{n} \right\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \| e_n \|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \overset{DI}{=} \infty.$$

□

Täydellisyyden ja normisuppenevien sarjojen välillä on tärkeä yhteys:

3.22. **Lause.** *Normiavaruus E on Banachin avaruus jos ja vain jos jokainen avaruuden E normisuppeneva sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E.*

Todistus.

"$\Rightarrow$" Olkoon E Banachin avaruus ja $\sum_k x_k$ avaruuden E normisuppeneva sarja. Jos $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned} \| s_{n+p} - s_n \| &= \| \sum_{j=1}^{n+p} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \| = \| x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} \| \\ &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} \sum_{j=n+1}^{n+p} \| x_j \| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \| x_j \| \to 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \to \infty$. Siis (s_n) on Cauchyn jono avaruudessa E, joten se suppenee.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että avaruuden E jokainen normisuppeneva sarja suppenee. Olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa E. Lauseen 3.4 nojalla riittää löytää suppeneva osajono (x_{n_j}). Konstruoidaan osajono (x_{n_j}) induktiolla seuraavasti:

Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2}$$

kaikilla $p, q \geq n_0$. Oletetaan, että on jo valittu luvut $n_0 < n_1 < \ldots < n_j$ ja valitaan seuraavaksi n_{j+1}. Koska jono (x_n) on Cauchyn jono, niin edelleen löytyy sellainen $n_{j+1} \in \mathbb{N}$, että $n_{j+1} > n_j$ ja

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2^{j+2}}$$

kaikilla $p, q \geq n_{j+1}$.

Merkitään nyt $y_0 = x_{n_0}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ kun $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin $\| y_j \| = \| x_{n_j} - x_{n_{j-1}} \| < \frac{1}{2^j}$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$, sillä $n_j > n_{j-1}$ ja valitsemalla $p = n_j$ ja $q = n_{j-1}$ arvio seuraa.

Siispä jono (y_j) on normisuppeneva, sillä

$$\sum_j \| y_j \| < \sum_j 2^{-(j+1)} < \infty.$$

Oletuksen nojalla sarja $\sum y_j$ siis suppenee ja merkitään sarjan summaa

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j.$$

Tarkastellaan sitten sarjan $\sum y_j$ osasummia. Havaitaan, että itse asiassa

$$\sum_{j=0}^{k} y_j = x_{n_0} + (x_{n_1} - x_{n_0}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k}.$$

Näin ollen jonon (x_n) osajono $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $y \in E$. Lauseen 3.4 nojalla siis myös jono (x_n) suppenee kohti pistettä y ja siis E on täydellinen.

□

Lauseen 3.22 nojalla voidaan usein osoittaa avaruuden täydellisyys: näin on esimerkiksi reaalilukujen joukon R tapauksessa. Olkoon $\sum a_k$ itseisesti suppeneva sarja R:ssä. Merkitään $b_k = |a_k| - a_k$, kun $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $0 \le b_k \le 2|a_k|$, joten sarja $\sum b_k$ suppenee vertailuperiaatteen nojalla. Koska $a_k = |a_k| - b_k$, suppenee sarja $\sum a_k$ myös. Siis Lause 3.22 sanoo, että $\mathbb{R}$ on täydellinen.

Normisuppenevien sarjojen avulla myös avaruuksien ℓ^p täydellisyys saadaan ”kivuttomasti”.

3.23. **Lause.** *Jokainen jonoavaruus ℓ^p on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon $\sum x^{(n)}$ normisuppeneva sarja avaruudessa ℓ^p, siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| x^{(n)} \|_p < \infty.$$

Jos vektori eli jono $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$, niin

$$|x_k^{(n)}| \le \Big(\sum_i |x_i^{(n)}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \| x^{(n)} \|_p$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \infty, \qquad \text{kullakin } k \in \mathbb{N}.$$

Siten skalaarilukujen sarja $\sum_n x_k^{(n)}$ suppenee, sillä $\mathbb{K}$ on täydellinen. Merkitään

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^{(n)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Olemme näin löytäneet uuden lukujonon $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ja väitämme että ko. sarja suppenee kohti vektoria y. Olkoon $\varepsilon > 0$. Normisuppenevuuden perusteella löytyy sellainen $m \in \mathbb{N}$, että

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \| x^{(n)} \|_p \leq \varepsilon.$$

Olkoon $i, r, s \in \mathbb{N}$, $m \leq r < s$. Tällöin

$$\sum_{k=0}^{i} \Big| y_k - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=0}^{i} \Big| \sum_{n=0}^{s} x_k^{(n)} - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \lim_{s\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p$$

Mutta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p = \Big\| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{n=r+1}^{s} \| x_k^{(n)} \|_p \Big)^p$$
$$\leq \Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} \| x_k^{(n)} \|_p \Big)^p \leq \varepsilon^p.$$

Kun $s \to \infty$, niin tästä seuraa, että

$$\sum_{k=0}^{i} \Big| y_k - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \varepsilon^p$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $r \geq m$. Antamalla siis $i \to \infty$ nähdään, että

$$\| y - \sum_{n=0}^{r} x^{(n)} \|_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} \Big| y_k - \sum_{n=0}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \varepsilon^p,$$

kun $r \geq m$. Siis jono $(y_k - \sum_{n=0}^{m} x_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, joten Lauseen 2.20 sivulla 18 nojalla

$$y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} = \Big(y_k - \sum_{n=0}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k\in\mathbb{N}} + \Big(\sum_{n=0}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$$

ja edelleen

$$\Big\| y - \sum_{n=0}^{r} x^{(n)} \Big\|_p \leq \varepsilon,$$

kun $r \geq m$. Näin ollen sarja $\sum x^{(n)}$ suppenee ja Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla ℓ^pon Banachin avaruus. □

L^p-AVARUUDET

Haluamme seuraavaksi määritellä jonoavaruuden ℓ^p vastineet jatkuvassa tapauksessa, eli avaruudet joiden normit saadaan suureista

$$\| f \|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \mu(\, \mathrm{d}x) \Big)^{1/p}$$

Päädymme näin L^p-avaruuksien käsitteeseen. Tämän tarkempi/syvällisempi teoria kuuluu kursseihin Mitta- ja integraali sekä Reaalianalyysi. L^p-avaruudet ovat kuitenkin keskeisiä esimerkkejä Funktionaalianalyysissä ja sen sovelluksissa; lisäksi Hilbert-avaruuksien (todellisesta) käytöstä ei saa kunnon kuvaa ilman L^2-avaruuksia. Käymme siksi alla L^p-avaruuksien perusideat lyhyesti läpi, niitä lukijoita silmällä pitäen, jotka eivät ole vielä suorittaneet yo. kursseja. Keskitymme nimenomaan ideoitten esittelyyn ja sivuutamme useiden väitteiden todistukset, jotka jäävät Mittateorian kursseilla käsiteltäviksi.

Tämän kurssin tarpeisiin riittää tarkastella (Lebesgue-)mitallisia osajoukkoja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mutta mitä alla kerrotaan pätee myös yleisissä mitta-avaruuksissa (Ω, μ). Muotoa

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$$

olevia funktioita kutsutaan yksinkertaisiksi funktioiksi; tässä $a_k \in \mathbb{K}$, $E_k \subset \Omega$ on mitallinen joukko sekä karakteristinen funktio $\chi_E(x) = 1$ jos $x \in E$ ja $\chi_E(x) = 0$ kun $x \notin E$. Yksinkertaisen funktion integraali määritellään yksinkertaisesti

$$\int_\Omega f \; d\mu \; = \int_\Omega f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k)$$

[Muista myös: m.k. $\equiv$ melkein kaikkialla, so. nollamittaisen joukon ulkopuolella.]

Jos $0 \le f$ on mitallinen funktio, löytyy jono yksinkertaisia funktioita f_n niin että $0 \le f_n \le f_{n+1} \le \cdots \le f$ ja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ melkein kaikkialla. Itse asiassa funktio on mitallinen jos ja vain jos se on yksinkertaisten funktioiden pisteittäinen raja m.k. $x \in \Omega$. Asetetaan

$$\int_\Omega f \; d\mu \; = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu, \tag{3.24}$$

missä f_n:nien integraalit muodostavat kasvavan lukujonon, ja siten yo. raja-arvo on olemassa.

Mittateoriassa näytetään että (3.24):n raja-arvo on approksimoivan jonon $\{f_n\}$ valinnasta riippumaton. Mutta voi hyvin olla että (3.24):n raja-arvo ja siis f:n integraali on ∞! Tämän pulman välttämiseksi, yleiselle mitalliselle funktiolle f sanotaan että se on *integroituva*, mikäli $\int_\Omega |f| \; d\mu < \infty$.

Jos nyt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on integroituva, funktion positiivinen osa $f_+ = \max\{f(x), 0\}$ ja negatiivinen osa $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ovat integroituvia, ja voimme asettaa

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu$$

Kompleksiarvoiselle funktiolle $f = u+iv$ asetetaan $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega u d\mu + i \int_\Omega v d\mu$.

Mittateoriassa osoitetaan, että jos f on Riemann integroituva (erityisesti, jos f on jatkuva !), silloin nyt määritelty integraali on täsmälleen sama kuin tuttu Riemann integraali !!

Olkoon sitten $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $\mu(\Omega) > 0$, missä μ on Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Määrittelemme aluksi joukon $L^{(p)}(\Omega) = L^{(p)}$ niiden mitallisten funktioiden $f \colon \Omega \to \mathbb{K}$ joukkona, joille

$$\| f \|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \mu(\,\mathrm{d}x) \Big)^{1/p} < \infty.$$

Jotta $L^{(p)}$olisi vektoriavaruus, on näytettävä, että $\| \cdot \|_p$ on seminormi avaruudessa $L^{(p)}$. Tähän tarvitaan (kuten ℓ^p-avaruuksien tapauksessa) Hölderin epäyhtälöä.

3.25. **Lemma** (Hölderin epäyhtälö)**.** *Jos $f \in L^{(p)}$ ja $g \in L^{(q)}$, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, niin tällöin tulo $fg \in L^{(1)}$ ja $\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q$ eli*

$$\int_\Omega |(fg)(x)| d\mu(x) \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{q}}$$

Todistus. Jos $\| f \|_p = 0$, niin $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$, jolloin myös tulo $(fg)(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$ ja siis $\int |fg| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Samoin pätee, jos $\| g \|_q = 0$. Näissä tapauksissa väite on ilmeinen.

Voidaan siis olettaa, että $\| f \|_p \| g \|_q > 0$. Sovelletaan Lemmaa 2.14 sivulla 14 muuttujat asettamalla

$$a = \frac{|f(x)|}{\| f \|_p} \text{ ja } b = \frac{|g(x)|}{\| g \|_q},$$

mistä seuraa epäyhtälö

$$\frac{|(fg)(x)|}{\| f \|_p \| g \|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\| f \|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\| g \|_q^q}.$$

Integroimalla tämä puolittain muuttujan x suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \| f \|_p^{-1} \| g \|_q^{-1} \int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu &\leq \frac{1}{p} \| f \|_p^{-p} \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \| g \|_q^{-q} \int_\Omega |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

$\square$

3.26. **Seuraus** (Minkowskin epäyhtälö). *Jos* $f, g \in L^p$ *ja* $p \geq 1$, *niin*

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p.$$

Todistus. HT. □

Koska selvästi $\| \lambda f \|_p = |\lambda| \| f \|_p$, niin $L^{(p)}$ on tämän ja Minkowskin epäyhtälön nojalla $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus. Mutta avaruudessa $L^{(p)}$ on se pulma, että $\| \cdot \|_p$ *ei ole* normi:

$$f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega \;\not\Leftrightarrow\; \| f \|_p = 0\,!$$

($\| f \|_p$ on vain seminormi). Pulmasta selvitäksemme, samaistamme kaikki ne funktiot, jotka ovat samoja m.k. x.

Seuraava esimerkki antaa mielikuvan mitä tämä samaistaminen käytännössä merkitsee. Integroidaan vaikkapa seuraava funktio välillä $[0, 1]$,

$$f(x) = x, \text{ kun } 0 \leq x < 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 \leq x \leq 1$$

Voisimme myös asettaa (Piirrä funktioiden kuvaajat !)

$$f(x) = 1, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 < x \leq 1$$

koska ei ole mitään luonnollista tapaa valita f:n arvoa epäjatkuvuuspisteessä $x = 1/2$; selvästi molemmat valinnat ovat yhtä hyviä, ja integroinnin kannalta molemmat valinnat tuottavat saman tuloksen. Onkin siksi järkevää samaistaa nämä funktiot !

Yleisemmin, annetulla funktiolla voi olla paljon enemmän epäjatkuvuus- (tai ”epämääräisyys”)pisteitä, joten saman filosofian mukaan on järkevää samaistaa funktiot f ja g, jos $f(x) = g(x)$ nollamittaista x:ien joukkoa lukuunottamatta.

Täsmällistä määrittelyä varten sanotaan että funktiot $f,\, g \in L^{(p)}$ ovat ekvivalentit, merk. $f \sim g$, jos $f = g$ m.k. x. Asetetaan myös

$$[f] = \{g \in L^{(p)} : g \sim f\}$$

Huomataan, että jos $f \sim g$ ja $F \sim G$ niin $(f+F) \sim (g+G)$, eli ekvivalenssiluokat muodostavat vektoriavaruuden, $[af + bg] = a[f] + b[g]$ (Selvitä itsellesi tämän yksityiskohdat !). Määritellään nyt

$$L^p(\Omega) = \{[f] \; : f \in L^{(p)}(\Omega)\} \tag{3.27}$$

Huomataan että $\| f \|_p = \| g \|_p$ aina kun $f \sim g$, ja $\| [f] \|_p := \| f \|_p$ on siten hyvin määritelty. Edelleen, $\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$, eli avaruudessa $L^p(\Omega)$ suure $\| \cdot \|_p$ *on normi.*

Käytännössä, pidämme (so. kohtelemme) $L^p(\Omega)$:n elementtejä funktioina. Myös, siisteissä tapauksissa, esimerkiksi jos luokassa $[f]$ on jatkuva funktio, valitsemme sen luokan edustajaksi, eikä tulkinta $f \in L^p(\Omega)$ tuota pulmia.

Kuitenkin, yleisessä tapauksessa L^p-funktion arvo ei pisteittäin hyvin määritelty. Jos tarvitsemme tiettyä arvoa $f(x)$, joudumme valitsemaan luokasta [f] yhden edustajan; jos haluamme näin saada tietoa koko luokasta $[f]$, meidän on tällöin huolehdittava siitä, että päättelyjen lopputulos (!) ei riipu edustajan f valinnasta.

Toinen tapa määritellä $L^p(\Omega)$ on tulkita yo. konstruktio enemmän lineaarialgebrallisin konstein, käyttäen vektoriavaruuden tekijäavaruuksia. Tarkemmin, olkoon X vektoriavaruus ja M sen aliavaruus. Koska X on yhteenlaskun suhteen Abelin ryhmä ja M sen aliryhmä, voimme muodostaa tekijäryhmän X/M, jonka alkioina ovat jäännösluokat modulo Y,

$$x + M, \quad x \in X.$$

(Tässä $x + M$ määritelty joukkona, kuten Luvussa 2) Asetetaan yhteenlasku ja skalaarilla kertominen luonnollisilla kaavoilla

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M \tag{3.28}$$

$$\lambda(x + M) = \lambda x + M \tag{3.29}$$

ja näin saadaan tekijäryhmästä X/M vektorialiavaruus.[3]

Olkoon nyt M avaruuden $L^{(p)}$ vektorialiavaruus, joka koostuu niistä funktioista f, joille pätee $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$.

3.30. **Määritelmä.** Avaruus $L^p = L^p(\Omega)$ on tekijäavaruus $L^{(p)}/M$.

Jos $f \in L^{(p)}$ on yleensä tapana merkitä funktion f määräämää tekijäavaruuden L^p alkiota eli luokkaa $f + M$ myös symbolilla f! Tässä on siis vain pidettävä mielessä, että jos kaksi avaruuteen $L^{(p)}$ kuuluvaa funktiota poikkeaa toisistaa enintään 0-mittaisessa joukossa, ne ovat avaruuden L^p alkioina samoja.

Kuten edellä todettiin, $\| f \|_p$ on sama kaikille funktioille $f \in L^{(p)}$, jotka poikkeavat toisistaan enintään 0-mittaisessa joukossa, joten lauseke $\| f \|_p$ on hyvin määritelty myös kaikille $f \in L^p$.

Seuraava tulos on keskeinen Funktionaalianalyyttisiä sovelluksia silmälläpitäen.

3.31. **Lause.** *$\| \cdot \|_p$ on normi avaruudessa L^p. Tällä normilla varustettena L^p on Banachin avaruus.*

---

[3]Tarkemmin tätä ideaa selvitetään kurssilla Lineaarialgebra II.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa yo. keskustelusta (Huomaa, että Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt pätevät myös avaruudessa L^p; Miksi ?).

L^p-avaruuksien täydellisyys kuuluu oikeastaan Reaalianalyysin kurssin materiaaliin, sillä päättely tarvitsee muutaman perustuloksen Lebesgue-integroinnista. Siksi ne lukijat, jotka eivät ole vielä Reaalianalysiä suorittaneet, voivat ottaa tuloksen annettuna; todistuksen argumentteja ei tarvita muualla tässä kurssissa.

Luonnostelemme alla kuitenkin täydellisyystodistuksen pääpiirteet, jotta Mittateoriaan perehtymätönkin lukija saa mielikuvan miten mitallisten funktioiden kanssa operoidaan. Täydellisyysagumentti on itse asiassa analoginen ℓ^pavaruuksien tapauksen kanssa.

L^p-avaruuksien täydellisyyttä varten tarvitaan seuraava Mitta ja integraalin tulos:

3.32. **Lemma** (Fatoun Lemma). *Jos $f_n \colon \Omega \to [0,\infty]$ on mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Todistus. Olkoon $g_k(x) = \inf_{n\ge k} f_n(x)$. Silloin g_k on mitallinen, $g_k \le f_k$, $0 \le g_1 \le g_2 \le \dots$ sekä

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

Koska $\{g_k\}$ on kasvava funktiojono, Monotonisen suppenemisen lauseen mukaan $\lim_{k\to\infty}\int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k d\mu$. Erityisesti,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega g_j(x)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Lauseen 3.31 todistus jatkuu. Olkoon $\sum f_n$ normisuppeneva sarja avaruudessa L^p ja $\sum \| f_n \|_p \le M < \infty$. Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla riittää osoittaa, että $\sum f_n$ suppenee. Voimme valita *edustajan* $f_n \in L^{(p)}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja riittää siis löytää sellainen $f \in L^{(p)}$, jolle

$$\lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{k} f_n - f \Big\|_p = 0.$$

Jos merkitään

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{k} |f_n(x)|, \quad x \in \Omega,$$

niin

$$\| g_k \|_p = \Big\| \sum_{n=1}^{k} |f_n| \Big\|_p \le \sum_{n=1}^{k} \| f_n \|_p \le M.$$

Monotonisen suppenemisen lauseen nojalla

$$\int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\Big)^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^{k} |f_n|\Big)^p \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \| g_k \|_p^p \le M^p < \infty.$$

Siis $g := \sum^\infty |f_n(x)| \in L^{(p)}$ ja edelleen tästä seuraa, että $g(x) < \infty$ m.k. x ja *näillä* x

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee avaruudessa $\mathbb{K}$. Asetetaan $f(x) = 0$, jos $g(x) = \infty$, jolloin $|f(x)| \le g(x)$ ja $f \in L^{(p)}$. Lisäksi Fatoun lemman nojalla

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \lim_{j\to\infty} \Big| \sum_{n=1}^{j} f_n - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega \Big| \sum_{n=1}^{j} f_n - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Otetaan nyt p:nnet juuret puolittain saadusta epäyhtälöstä, jolloin päädytään

$$\Big\| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big\|_p = \liminf_{j\to\infty} \Big\| \sum_{n=k+1}^{j} f_n \Big\|_p \le \liminf_{j\to\infty} \sum_{n=k+1}^{j} \| f_n \|_p = \sum_{n=k+1}^{\infty} \| f_n \|_p \to 0,$$

kun $k \to \infty$. Siispä jokainen avaruuden L^p normisuppeneva sarja suppenee, joten L^p on täydellinen eli L^p on Banachin avaruus. □

Yllä oletettiin, että $1 \le p < \infty$. Tapaus $p = \infty$ on itse asiassa helpompi. Koska tapauksissa $1 \le p < \infty$ samaistimme funktiot, jotka poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa, haetaan nyt tälle vastine kun $p = \infty$. Päädymme seuraavaan käsitteeseen:

3.33. **Määritelmä.** Mitallinen funktio $f : \Omega \to \mathbb{K}$ on *oleellisesti rajoitettu*, jos on olemassa $0 \le M < \infty$, jolle $|f(x)| \le M$ kaikilla x jonkin 0-mittaisen joukon ulkopuolella. *Oleellinen supremum* eli

$$\| f \|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

on infimum kaikista edellä mainituista luvuista M, siis

$$\| f \|_\infty := \inf\{ M : \text{ joukon } \{ x \in \Omega : |f(x)| > M \} \text{ mitta} = 0 \}.$$

Kuten tapauksessa $1 \le p < \infty$ samaistamme taas $f \sim g$, jos $f(x)$ ja $g(x)$ poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa. Merkitään avaruudella L^∞ joukkoa, jonka muodostavat kaikki oleellisesti rajoitettujen funktioiden ekvivalenssiluokat $[f]$.

Kuten edellä, tulemme säännöllisesti käyttämään merkintää $f \in L^\infty$, kun tarkkaan ottaen tarkoitetaan, että f:n määräämä luokka $[f] \in L^\infty$.

3.34. **Lause.** $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *on Banachin avaruus.*

Todistus.

Taas tarvitaan hieman Mittateorian tietoja, ja siksi ne lukijat jotka eivät ole Reaalianalyysia suorittaneet, voivat ottaa tuloksen annettuna. Selvyyden vuoksi annamme kuitenkin tässä todistuksen yksityiskohdat.

1) $|f(x)| \le \| f \|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, sillä

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \| f \|_\infty\}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \| f \|_\infty + 1/n\}) = 0$$

2) L^∞ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_\infty$ on normi: Koska $|f(x)| \le \| f \|_\infty$ ja $|g(x)| \le \| g \|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, saadaan

$$|f+g| \le |f|+|g| \le \| f \|_\infty + \| g \|_\infty \text{ m.k. } x \in \Omega \Rightarrow \| f+g \|_\infty \le \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

(Selvitä itsellesi miksi $\| af \|_\infty = |a| \| f \|_\infty$ kaikilla $f \in L^\infty$!)

3) L^∞ on täydellinen:

Olkoon (f_n) Cauchyn jono avaruudessa L^∞. Lauseen 3.3 sivulla 25 nojalla jono on rajoitettu eli $\| f_n \|_\infty \le M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon A_k ja $B_{n,m}$ ne joukon Ω osajoukot, joissa $|f_k(x)| < \| f_k \|_\infty$ ja $|f_n(x) - f_m(x)| < \| f_n - f_m \|_\infty$. Oleellisen supremumin määritelmän nojalla joukot A_k ja $B_{n,m}$ ovat 0-mittaisia. Asetetaan

$$E = \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m}\Big)$$

Tällöin

$$\mu(E) \le \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jono (f_n) on Cauchyn jono, löytyy sellainen $n_e \in \mathbb{N}$, että

$$\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$$

kunhan $n, m \ge n_\varepsilon$. Kun $x \in \Omega \setminus E$, niin

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$$

kunhan $n, m \ge n_\varepsilon$, joten $(f_n(x))$ on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{K}$. Siispä on olemassa raja-arvo $f(x) := \lim f_n(x)$ jokaisella $x \in \Omega \setminus E$. Asetetaan $f(x) = 0$, kun $x \in E$. Koska

$$|f_n(x)| \le \| f_n \|_\infty \le M$$

kaikilla $x \in \Omega \setminus E$, niin $f \in L^\infty$. Samoin on voimassa

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \le \limsup_{m\to\infty} \| f_m - f_n \|_\infty \le \varepsilon,$$

kun $n \geq n_\varepsilon$. Koska $\mu(E) = 0$, niin tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0.$$

$\square$

Huomautus. Yleisimmin määritellään (vastaavalla tavalla kuin L^∞-avaruus) Banachin avaruus $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ kun (Ω, Σ, μ) on (täydellinen) mitta-avaruus ja $1 \leq p \leq \infty$ (vrt. Reaalianalyysi I, 1.4-1.6)

Ylimääräinen huomautus: Avaruuden L^∞ täydellisyys voidaan todistaa myös käyttäen edellä kuvattua tekijäavaruuden struktuuria. Nimittäin, jos M on avaruuden X vektorialiavaruus niin yhtälöiden (3.28) avulla määriteltiin uusi vektoriavaruus X/M. Jos nyt X on normiavaruus ja M sen *suljettu* vektorialiavaruus, saadaan X/M:stä normiavaruus asettamalla

$$\| x+M \|_{X/M} = \inf\{\| x+m \| : m \in M\} = \inf\{\| x-m \| : m \in M\} = dist(x, M)$$

Helposti nähdään että $\| x + M \|_{X/M}$ on normi: Jokaisella $m_1, m_2 \in M$

$$\| x + y + M \|_{X/M} \leq \| x + y + m_1 + m_2 \| \leq \| x + m_1 \| + \| y + m_2 \|$$

ja ottamalla inf yli vektoreiden m_1, m_2, saadaan

$$\| x + y + M \|_{X/M} \leq \| x + M \|_{X/M} + \| y + M \|_{X/M}$$

Samalla tavalla nähdään, että $\| ax + M \|_{X/M} = |a| \| x + M \|_{X/M}$. Lisäksi, yllä-olevasta seuraa, että $\| x + M \|_{X/M} = 0 \Leftrightarrow dist(x, M) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{M} = M$, eli $x + M = 0 + M$, avaruuden X/M nolla-alkio.

Lisäksi, harjoituksissa näytetään, että jos X on Banach avaruus ja $M \subset X$ on suljettu v.a.a, niin silloin X/M on Banach avaruus.

Valitsemalla nyt $X = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ rajoitettu ja mitallinen}\} \subset B(\Omega, \mathbb{K})$ havaitaan mittateorian avulla, että X on suljettu $B(\Omega, \mathbb{K})$:ssa, ja siis Banach avaruus. Jos $M = \{f \in X : f(x) = 0 \text{ m.k.} x \in \Omega\}$, niin silloin voidaan samaistaa

$$L^\infty = X/M$$

(Väitteen yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi harjoitustehtäväksi)
Harjoitus 4/Tehtävä 5 kertoo nyt että L^∞ on Banach avaruus.

Banachin kiintopistelause (epälineaarinen FA)

Seuraava täydellisyyden aspekti on osoittautunut hyödylliseksi ja monipuoliseksi työkaluksi monissa eri funktionaalianalyysin sovelluksissa.

3.35. **Määritelmä.** Olkoon E Banach-avaruus ja $D \subset E$ osajoukko ($D \neq \emptyset$). Kuvaus $T : D \to E$ on *kontraktio* D:ssä, jos

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \| x - y \| \, \text{kaikilla} \, x, y \in D$$

Kuvaus $T : D \to E$ on *aito kontraktio* jos on olemassa sellainen vakio $0 \leq k < 1$, että

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \| \, \text{kaikilla} \, x, y \in D$$

Jokainen kontraktio $T : D \to E$ on tasaisesti jatkuva D:ssä. Piste $x \in D$ on kuvauksen $T : D \to E$ *kiintopiste*, jos $T(x) = x$. Huomaa, että kontration ei tarvitse olla lineaarinen kuvaus.

Huomautus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $D \subset X$ osajoukko. Vastaavalla tavalla määritellään (aito) kontraktio $T : D \to X$ ja sen kiintopiste.

3.36. **Lause** (Banachin kiintopistelause, 1922). *Olkoon E Banachin avaruus ja $D \subset E$ suljettu osajoukko ja $T : D \to D$ aito kontraktio. Tällöin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$ (eli $T(x) = x$).*

Todistus. Jos $x_0 \in D$ on mielivaltainen, asetetaan rekursiivisesti

$$\begin{cases} x_1 = T(x_0), \\ x_{n+1} = T(x_n), \quad \text{kun } n = 1, 2... \end{cases}$$

Merkitään $\alpha_n = \| x_{n+1} - x_n \|$ $(n \in \mathbb{N})$. Tällöin

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \| x_{n+1} - x_n \| = \| T(x_n) - T(x_{n-1}) \| \leq k \| x_n - x_{n-1} \| \\ &= k \| T(x_{n-1}) - T(x_{n-2}) \| \leq k^2 \| x_{n-1} - x_{n-2} \| \\ &\leq ... \leq k^n \| x_1 - x_0 \| = k^n \alpha_0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Kolmioepäyhtälöä, arviota (3.37) ja geometrisen sarjan summakaavaa käyttämällä saadaan kaikilla $p = 1, 2, ..., n \in \mathbb{N}$ arvio

$$\begin{aligned} \| x_{n+p} - x_n \| &\leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \| x_{j+1} - x_j \| = \sum_{j=n}^{n+p-1} \alpha_j \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} k^j \alpha_0 \\ &= \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{p-1} k^j \leq \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{\alpha_0 k^n}{1-k} \to 0, \end{aligned} \tag{3.38}$$

kun $n \to \infty$. Siis $(x_n) \subset E$ on Cauchyn jono. Koska E Banachin avaruus, niin $\lim x_n = x \in E$. Koska $x_n = T(x_{n-1}) \in D$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$, niin

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{D} = D,$$

koska D on suljettu. Koska edelleen oletettiin, että T jatkuva, niin

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

eli x on kiintopiste. Osoitetaan vielä, että x on yksikäsitteinen. Olkoon $y \in D$ toinen kiintopiste kuvaukselle T eli $T(y) = y$. Tällöin

$$\| x - y \| = \| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \|$$

jollakin $0 \leq k < 1$, sillä T on aito kontraktio. Siispä ainoa mahdollisuus on, että $\| x - y \| = 0$ eli $x = y$. □

Huomautus. Yllä olevassa todistuksessa kiintopiste x löytyi iteroimalla:

$$x = \lim_{n\to\infty} T(x_n), \text{ missä } x_n = T(x_{n-1}) = \dots = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n\,\mathrm{kpl}}(x_0),$$

missä $x_0 \in D$ oli jopa mielivaltainen. Lisäksi epäyhtälöstä (3.38) saadaan virhearvio (antamalla $p \to \infty$):

$$\| x - T^n(x_0) \| \leq \frac{k^n}{1-k} \| T(x_0) - x_0 \| \tag{3.39}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi tarkastellaan parilla esimerkillä kuinka Banachin kiintopistelausetta voidaan soveltaa. Sovelluskohteita on itse asiassa lukematon määrä, aina yhden muuttujan numeriikasta esim. fraktaaligeometriaan asti. Sovelluksissa on tietysti löydettävä kuhunkin ongelmaan sopiva Banachin avaruus ja vastaava kontraktiokuvaus.

3.40. **Esimerkki.** Johdantoluvussa [vrt. (0.1)] lupasimme ratkaista integraaliyhtälön

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s) f(s)\,ds = g(x), \quad x \in [0,1], \tag{3.41}$$

ainakin kun parametri λ on pieni. Nyt meillä on koossa tässä tapauksessa tarvittavat ratkaisun elementit:

Annetuista funktioista $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ oletettiin että ne ovat jatkuvia. Siksi on luontevaa valita alla olevaksi Banach avaruudeksi $C(0,1)$. Sopiva kontraktiokuvaus voidaan muodostaa monellakin tavalla; niistä helpoin ja luonnollisin ehkä

$$T : C(0,1) \to C(0,1), \quad (Tf)(x) = g(x) \;+\; \lambda \int_0^1 K(x,s) f(s)\,ds \tag{3.42}$$

sillä heti nähdään, että f on T:n kiintopiste, $T(f) = f$, jos ja vain jos f ratkaisee yhtälön (3.41).

Esimerkin 2.27 tuloksista seuraa, että $T : C(0,1) \to C(0,1)$ on jatkuva kuvaus. Saman Esimerkin menetelmillä voimme myös selvittää milloin T on aito kontraktio. Nimittäin

$$\begin{aligned} \| Tf - Th \|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 \lambda\, K(x,s)\,(f(s) - h(s))\, ds \right| \\ &\leq |\lambda|\, \| K \|_\infty\, \| f - h \|_\infty \end{aligned}$$

missä $\| K \|_\infty = \sup\{\ |K(x,s)| : x, s \in [0,1]\ \}$. Havaitaan siis että T on aito kontraktio jos λ on niin pieni, että $|\lambda| < 1/\| K \|_\infty$.

Banachin kiintopistelauseesta seuraa nyt että mikäli $|\lambda| < 1/\| K \|_\infty$, on kuvauksella T kiintopiste ja siten yhtälöllä (3.41) ratkaisu $f \in C(0,1)$; lisäksi f on yksikäsitteinen.

Banachin kiintopistelause on varsin vahva, sillä se antaa myös nopean algoritmin integraaliyhtälön ratkaisun f konstruoimiseksi (esim. numeerisesti): Lauseen jälkeisen huomautuksen mukaan $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ missä

$$g_0(x) = g(x), \quad g_1(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s)g(s)ds,$$

$$g_2(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s)g(s)ds \ + \ \lambda^2 \int_0^1 K(x,t) \int_0^1 K(t,s)g(s)ds\, dt,$$

ja niin edelleen. Lisäksi, arvion (3.39) mukaan jonon g_n suppeneminen on eksponentiaalista.

Ainoa pulma Banachin lauseessa on että se toimii vain (aidoille) kontraktioille. Erityisesti, herää kysymys: miten yhtälöt (3.41) käyttäytyvät yleisillä parametreilla λ ? !

Seuraava esimerkki näyttää, että yllä λ:n pienuus oli olennaista; yleisten parametrien tapaus on siis monimutkaisempi.

3.43. **Esimerkki.** Valitaan integraaliyhtälön (3.41) ytimeksi $K(x,s) = xs$, $0 \leq x, s \leq 1$, sekä olkoon annettu funktio $g(x) \equiv 1$. Silloin yhtälö (3.44) saa muodon

$$f(x) - \lambda\, x \int_0^1 sf(s)ds = 1, \quad x \in [0,1] \tag{3.44}$$

Koska $\| K \|_\infty = \sup_{x,s\in[0,1]} |K(x,s)| = 1$, yhtälöllä on ratkaisu ainakin kun $|\lambda| < 1$. Lisäksi kuten yllä, ratkaisun voi löytää iteroimalla operaattoria $Th = 1 + \lambda \int_0^1 xsh(s)ds$; iteroinnissa huomataan että ratkaisun voi kehittää potenssisarjana λ:n suhteen. Valitussa erikoistapauksessamme potenssisarjan voi jopa esittää suljetussa muodossa (Ylimääräinen HT: Määrää ko. sarja ja sen summa).

Toisaalta, tapauksessa $K(x,s) = x\,s$ yhtälön voi myös ratkaista suoraan: Havaitaan nimittäin, että jokainen (3.44):n ratkaisu on muotoa $f(x) = 1 + Cx$ jollakin vakiolla C (Miksi?). Sijoittamalla nähdään että (3.44):n kanssa on yhtäpitävää

$$1 + Cx - \lambda\, x \int_0^1 s(1 + Cs)ds = 1 \tag{3.45}$$

Integroinnin jälkeen (Tee se !) tämä identiteetti saa muodon $C - \lambda(1/2 + C/3) = 0$. Siten

$$C = \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{3-\lambda} \quad \text{ja} \quad f(x) = 1 + \frac{3\lambda\, x}{6 - 2\lambda}$$

Integraaliyhtälö siis ratkeaa aina kun $\lambda \neq 3$. Kun $\lambda = 3$ ratkaisua ei olemassa, millään vakiolla C.

Ylläolevassa löysimme tasan yhden poikkeusarvon λ. Esimerkkiä muokkaamalla voit helposti löytää ytimiä, joilla on 2, 3 tai useampia poikkeusarvoja.

Kun seuraavassa luvussa olemme rakentaneet Hilbertavaruuksien perusteorian, tulemme osoittamaan vielä enemmän:

3.46. **Esimerkki.** Olkoon

$$K(x,s) = \frac{1}{3 - e^{2\pi i(x-s)}}, \quad x, s \in [0,1] \tag{3.47}$$

[Huom: Eulerin identiteettiä $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ käyttäen yo. ytimen voi kirjoittaa myös trigonometristen funktioiden avulla.]
Tällöin: Jos $\lambda \neq 3^n$, $n = 1, 2, \ldots$, yhtälö (3.41) ratkeaa kaikilla $g \in C(0,1)$. Toisaalta, jos $\lambda = 3^n$ jollakin n, ei ratkaisua kaikilla funktioilla g löydy !
Väitteen todistus seuraa nopeasti Fourier-sarjojen ominaisuuksista, ja jätämme sen siksi lukuun 4.

Huomaa, että tässäkin esimerkissä poikkeusarvojen joukko jää diskreetiksi.

Katsotaan lopuksi vielä yksi (hyvin!) erilainen esimerkki Banachin kiintopistelauseen soveltamisesta; tämä esimerkin luonne on yleissivistävä, eikä kuulu varsinaiseen kurssisisältöön; sivuutamme siksi osan todistuksista.

Muistetaan että Banachin kiintopistelause on yleispätevä periaate, jota voidaan käyttää myös täydellisissä metrisissä avaruuksissa. Konstruoidaan nyt sen avulla Kochin lumihiutalekäyrä !

3.48. **Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{X} = \{ \ A \subset \mathbb{R}^2 : \ A$ on *kompakti*[4] osajoukko $\}$. Jos $A, B \in \mathcal{X}$, asetamme

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} \operatorname{dist}(x,B), \sup_{y\in B} \operatorname{dist}(y,A)\},$$

missä etäisyys $\operatorname{dist}(x,B)$ pisteestä x joukkoon A määritellään

$$\operatorname{dist}(x,B) = \inf\{ \ \| x-b \| : \ b \in B \ \}$$

kun normina $\| \cdot \|$ on euklidinen normi tasossa $\mathbb{R}^2$. Tällöin d_H on *metriikka* joukkoperheessä $\mathcal{X}$ ja tätä metriikkaa sanotaan *Hausdorffin metriikaksi.*

Lisäksi $(\mathcal{X}, d_H)$ on *täydellinen* (perustuu kompaktisuuteen, sivuutetaan yksityiskohdat; HT). Olkoot $f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $1 \le j \le n$, aitoja kontraktioita ja $k_j < 1$ vastaavat kontraktiovakiot. Tällöin

$$(*) \qquad k = \max_{j=1,\dots,n} k_j < 1,$$

jolloin siis $\| f_j(x) - f_j(y) \| \le k \| x-y \|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja $j = 1, 2, \dots, n$. Asetetaan

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A),$$

kun $A \in \mathcal{X}$ eli kun $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti osajoukko. Koska kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti (Topologia I) on

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A)$$

kompakti kaikilla $A \in \mathcal{X}$. Siis $\Phi(A)$ on kuvaus $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Väite. Φ *on aito kontraktio* $(\mathcal{X}, d_H) \to (\mathcal{X}, d_H)$

Todistus. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakteja. Jos

$$z \in \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A),$$

[4] Heine-Borel: $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakti $\Leftrightarrow$ A suljettu ja rajoitettu

niin $z = f_l(x)$ joillakin $x \in A$ ja $l \in \{1, \ldots, n\}$. Olkoon $y \in B$ m.v. Tällöin $f_l(y) \in f_l(B) \subset \Phi(B)$, joten

$$\mathrm{dist}(z, \Phi(B)) \leq \| f_l(x) - f_l(y) \| \leq k \| x - y \|$$

missä $k < 1$ ehdon $(*)$ nojalla. Siis ottamalla infimum muuttujan $y \in B$ suhteen saadaan, että

$$\mathrm{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \ \mathrm{dist}(x, B).$$

Koska $z \in \Phi(A)$ mielivaltainen, on

$$\sup_{z \in \Phi(A)} \mathrm{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \sup_{x \in A} \mathrm{dist}(x, B)$$

Symmetrian perusteella pätee:

$$\sup_{z \in \Phi(B)} \mathrm{dist}(z, \Phi(A)) \leq k \sup_{y \in B} \mathrm{dist}(y, A)$$

Siispä

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) \leq k d_H(A, B)$$

kun $A, B \in \mathcal{X}$, joten Φ on aito kontraktio. $\square$

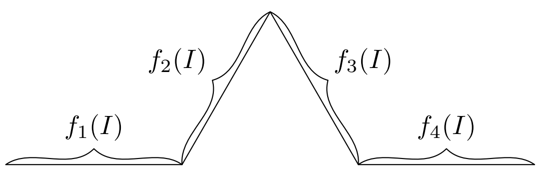
Nyt Banachin kiintopistelauseen metrisen version nojalla kuvauksella Φ on yksikäsitteinen kiintopiste $A \in \mathcal{X}$ eli on olemassa kompakti osajoukko $A \subset \mathbb{R}^2$, jolle

$$A = \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A).$$

Valitaan esimerkiksi kontraktiot f_j *similariteeteiksi* eli

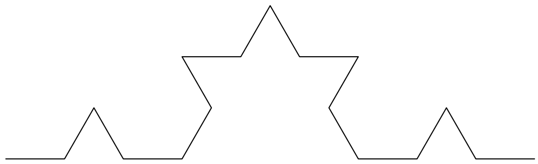
$$f_j(x) = r_j O_j(x) + b_j, \quad j = 1, ..., n$$

missä $0 < r_j < 1, b_j \in \mathbb{R}^2$ ja $O_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jokin tason kierto origon ympäri. Tällöin saadaan kauniita esimerkkejä "fraktaaleista" joukoista. Valitaan vaikkapa similaariteetit $f_1, \ldots, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että ne kuvaavat yksikköjanan $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ kuten seuraavassa kuvassa.

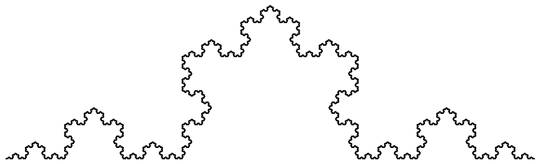


Nämä similariteetit määräävät kuvauksen Φ kuten yllä. Mikä on tällöin vastaava invariantti joukko A, jolle $\Phi(A) = A$?!

Banachin kiintopistelauseen todistuksesta tiedämme, että kiintopiste A saadaan iteroimalla kuvausta Φ (esim. lähtien joukosta $I \in \mathcal{X}$). Nyt $\Phi^2(I) = \Phi(\Phi(I))$ näyttää tältä:



Rajalla $A = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(I)$ saa seuraavan muodon (Kochin lumihiutalekäyrä):



Edellä oleva Banachin kiintopistelauseen sovellus on peräisin J. E. Hutchinsonilta vuodelta 1981.

4. Hilbertin avaruudet

Hilbertin avaruudet ovat ääretönulotteisista normiavaruuksista ominaisuuksiltaan kaikkein lähinnä "kotiavaruutta" $\mathbb{R}^n$ tai $\mathbb{C}^n$. Tästä syystä niiden teoria on joustava ja käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Hilbertin avaruuden normi määräytyy *sisätulosta*.

4.1. **Määritelmä.** Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$. Kuvaus $f\colon E \times E \to \mathbb{K}$ on *Hermiten muoto*, jos

(i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ kaikilla $x_1, x_2, y \in E$,

(ii) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$

(iii) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ kaikilla $x, y \in E$. Tässä $\overline{z}$ on kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ kompleksikonjugaatti.

Huomautus.

1. Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin ehto (iii) voidaan kirjoittaa muodossa $f(y, x) = f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$

2. Suoraan laskemalla nähdään, että

$$f(x, y_1 + y_2) = \overline{f(y_1 + y_2, x)} \overset{(i)}{=} \overline{f(y_1, x)} + \overline{f(y_2, x)} = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$

ja

$$f(x, \lambda y) = \overline{f(\lambda y, x)} \overset{(ii)}{=} \overline{\lambda}\ \overline{f(y, x)} = \overline{\lambda} f(x, y)$$

kaikilla $x, y_1, y_2 \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Hermiten muoto f on siis *konjugaattilineaarinen* jälkimmäisen muuttujan suhteen.

3. Nolla-alkion tapauksessa $f(\bar{0}, y) = 0 = f(x, \bar{0})$ kun $x, y \in E$, sillä $2f(\bar{0}, y) = f(2 \cdot \bar{0}, y) = f(\bar{0}, y)$.

Hermiten muoto $f : E \times E \to \mathbb{K}$ on *sisätulo* (tai skalaaritulo) avaruudessa E, jos f on lisäksi *aidosti positiivinen* eli

$$f(x, x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in E \text{ sekä } f(x, x) = 0 \text{ joss } x = \bar{0}.$$

Sisätulon tapauksessa merkitsemme:

$$(\, x \,|\, y \,) = f(x, y), \quad x, y \in E$$
$$\|\, x \,\| = \sqrt{(\, x \,|\, x \,)}, \quad x \in E.$$

Joskus käytämme sisätulolle myös merkintää $(\, x\,,\, y\,)$.

Vektoriavaruus E on *sisätuloavaruus*, jos E on varustettu sisätulolla $(\,\cdot \,|\, \cdot\,)$.

4.2. **Lause** (Cauchy–Schwarzin epäyhtälö). *Sisätuloavaruudessa E pätee*

$$\text{(CS)} \qquad |(\,x\,|\,y\,)| \le \|\,x\,\|\|\,y\,\| \quad \text{kaikilla } x, y \in E.$$

Todistus. Voidaan olettaa $x \neq \bar{0}$, $y \neq \bar{0}$ (muuten (CS) on ilmeinen). Jokaisella $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

$$0 \le (\,x + \lambda y\,|\,x + \lambda y\,) \overset{(i)-(iii)}{=} (\,x\,|\,x\,) + \lambda(\,y\,|\,x\,) + \overline{\lambda}(\,x\,|\,y\,) + \underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{=|\lambda|^2}(\,y\,|\,y\,)$$

$$\overset{(iii)}{=} \|\,x\,\|^2 + \lambda\overline{(\,x\,|\,y\,)} + \overline{\lambda}(\,x\,|\,y\,) + |\lambda|^2\|\,y\,\|^2.$$

Valitaan $\lambda = -\dfrac{(\,x\,|\,y\,)}{\|\,y\,\|^2}$. On hyvä huomata, että tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ polynomin $\lambda \mapsto \|\,x\,\|^2 + 2\lambda(\,x\,|\,y\,) + \lambda^2\|\,y\,\|^2$ minimikohta! Tällä valinnalla edellisestä epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 0 &\le \|\,x\,\|^2 - \frac{2|(\,x\,|\,y\,)|^2}{\|\,y\,\|^2} + \frac{|(\,x\,|\,y\,)|^2}{\|\,y\,\|^4}\|\,y\,\|^2 = \|\,x\,\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|\,y\,\|^2} \\ \iff &\ |(x|y)|^2 \le \|\,x\,\|^2\|\,y\,\|^2, \end{aligned}$$

mikä osoittaa väitteen. $\square$

4.3. **Seuraus.** *Kuvaus* $\|\,x\,\| = \sqrt{(x|x)}$, $x \in E$, *on sisätuloavaruuden E normi.*

Todistus. Osoitetaan ensin kolmioepäyhtälö. Suoraan laskemalla ja käyttämällä identiteettiä $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re} z$, joka on voimassa kaikilla kompleksiluvuilla $z \in \mathbb{C}$, saadaan

$$\begin{aligned} 0 \le \|\,x + y\,\|^2 = (\,x + y\,|\,x + y\,) &\overset{(i)-(iii)}{=} \|\,x\,\|^2 + (\,x\,|\,y\,) + (\,y\,|\,x\,) + \|\,y\,\|^2 \\ &= \|\,x\,\|^2 + (\,x\,|\,y\,) + \overline{(\,x\,|\,y\,)} + \|\,y\,\|^2 \\ &= \|\,x\,\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\,x\,|\,y\,) + \|\,y\,\|^2 \end{aligned}$$

Koska kompleksiluvuilla $z \in \mathbb{C}$ on aina $\mathrm{Re}\,z \le |z|$, niin edellisen epäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|\,x + y\,\|^2 &\le \|\,x\,\|^2 + 2|(\,x\,|\,y\,)| + \|\,y\,\|^2 \\ &\overset{\text{(CS)}}{\le} \|\,x\,\|^2 + 2\|\,x\,\|\|\,y\,\| + \|\,y\,\|^2 = (\|\,x\,\| + \|\,y\,\|)^2 \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri saadaan $\|\,x + y\,\| \le \|\,x\,\| + \|\,y\,\|$, kun $x, y \in E$. Edelleen, kun $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, on selvästi voimassa

$$\|\,\lambda x\,\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}}(\,x\,|\,x\,) = \sqrt{|\lambda|^2\|\,x\,\|^2} = |\lambda|\|\,x\,\|.$$

Myös ehto (N3) toteutuu, sillä $\|\,x\,\| = \sqrt{(x|x)} = 0$ joss $x = \bar{0}$, sillä $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ on sisätulo. $\square$

4.4. **Määritelmä.** Sanomme, että täydellinen sisätuloavaruus $(E, (\,\cdot\,|\,\cdot\,))$ on *Hilbertin avaruus.*

Hilbertin avaruuden nimitys tulee David Hilbertin (1862–1943) mukaan.

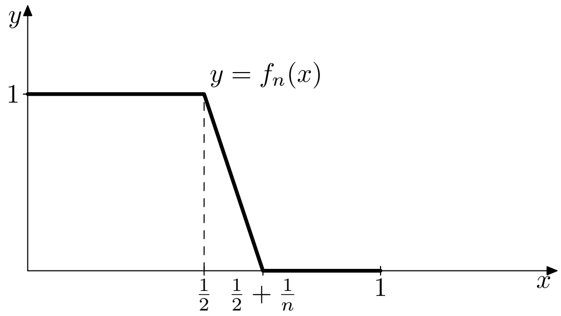
4.5. **Esimerkki.**

1. Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, niin kuvaus
$$(\,x\,|\,y\,) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$$
on vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ sisätulo. Vastaava normi
$$\|\,x\,\|_2 = \sqrt{(\,x\,|\,x\,)} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$
on avaruuden $\mathbb{K}^n$ tavallinen euklidinen normi ja $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus. Merkitään usein $\ell_2^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2),\ n = 1, 2 \dots$

2. Jonoavaruudessa ℓ^2 määritellään sisätulo kaavalla
$$(*) \qquad (x|y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j, \text{ kun } x = (x_k),\ y = (y_k) \in \ell^2.$$
Sisätulon määräämä normi on
$$\|\,x\,\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ kun } x = (x_k)\ \in \ell^2,$$
eli avaruuden ℓ^2 tavallinen normi, jonka suhteen ℓ^2 on täydellinen (Katso Lause 3.23 sivulla 34). Siis $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus.

   Huomautus. Jonoavaruuksien Hölderin epäyhtälön 2.17 tai Schwarzin epäyhtälön 2.18 nojalla
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \overline{y}_k| \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty, \text{ kun } (x_k), (y_k) \in \ell^2,$$
joten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$ suppenee (itseisesti) $\mathbb{K}$:ssa (ja $(*)$ on järkevä).

3. Jos avaruus $C(0,1) = \{\ f\colon [0,1] \to \mathbb{K} :\ f \text{ jatkuva}\ \}$ varustetaan sisätulolla
$$(\,f\,|\,g\,) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t, \quad f, g \in C(0,1),$$
niin $(C(0,1), \|\cdot\|_2)$ ei ole Hilbertin avaruus, missä
$$\|\,f\,\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 \ \mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}},$$
sillä $(C(0,1), \|\cdot\|_2)$ ei ole täydellinen. Perusteluksi tarkastele seuraava kuvaa ja pohdi, mitä tapahtuu, kun $n \to \infty$.



KUVA 4. Jatkuva funktio f_n, joka approksimoi epäjatkuvaa funktiota $\|\cdot\|_2$-normissa

4. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko. Tällöin avaruus $L^2(\Omega)$ varustettuna sisätulolla

$$(f \,|\, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in L^2(\Omega), \tag{4.6}$$

on Hilbertin avaruus (normissa $\| f \|_2 = (\int_\Omega |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$, vrt. Lause 3.31 sivulla 39.

Huomaa että tulofunktio $f(x)\overline{g(x)}$ on integroituva ja (4.6) siis hyvin määritelty kun f ja $g \in L^2(\Omega)$; tämä seuraa integraalien Hölderin epäyhtälöstä (Lemma 3.25 sivulla 37).

Kun verrataan kahta viimeistä esimerkkiä, käy ilmi, että $C(0,1)$ on tiheä avaruudessa $(L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$ ja siten $L^2(0,1)$ on vektoriavaruuden $C(0,1)$ *täydentymä* $\|\cdot\|_2$-normin suhteen. Tämä osoitetaan myöhemmin kurssin aikana (kts. Lause 5.5 luvussa 5)

Alamme sitten setvimään Hilbertin avaruuksien ominaisuuksia. Havaitaan, että (geo)metrisesti ne toimivat kuten kotiavaruus $\mathbb{K}^n$. Emme kuitenkaan voi vedota äärellisulotteisiin ilmiöihin, mutta esimerkiksi kahden annetun vektorin välinen kulma on järkevä Hilbertin avaruudessa:
Jos $x, y \neq \bar{0}$ ovat $\mathbb{R}$-kertoimisen Hilbertin avaruuden E alkioita, niin määrittelemme niiden välisen kulman $\varphi \in [0, 2\pi)$ tutulla kaavalla

$$(x \,|\, y) = \| x \| \, \| y \| \cos\varphi.$$

Olkoon vaikkapa $x = (2^{-n})_1^\infty$ ja $y = (3^{-n})_1^\infty \in \ell^2$. Tällöin

$$(x \,|\, y) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^\infty 6^{-n} = 1/5$$

ja koska $\| x \|_2 = \sqrt{\sum (2^{-n})^2} = 1/\sqrt{3}$ ja vastaavasti $\| y \|_2 = 1/\sqrt{8}$, on

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow \varphi \sim 11^o$$

Funktioiden välisiä kulmia pohdittaessa kaikkein helpoin on tilanne, jossa vektorit ovat kohtisuorassa. Tätä teemaa kannattaa kehittää vähän pitemmällekin:

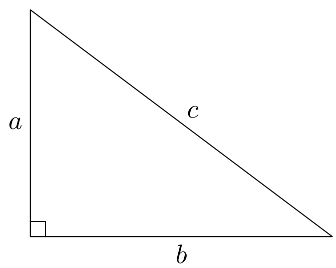
4.7. **Määritelmä.** Sisätuloavaruuden E vektorit $x, y \in E$ ovat *ortogonaaliset* (eli *kohtisuorat*), jos $(\, x \,|\, y \,) = 0$. Ortogonaalisuutta merkitään $x \perp y$. Osajoukot $A, B \subset E$ ovat *ortogonaaliset*, merkitään $A \perp B$, jos $x \perp y$ kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$.

Ortogonaalisten vektorien summilla on seuraava tuttu ominaisuus. Hilbertin avaruuksien hajotelmia konstruoitaessa sillä tulee olemaan tärkeä rooli.

4.8. **Lause** (Pythagoras). *Olkoon E sisätuloavaruus. Jos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ ja vektorit ovat keskenään ortogonaaliset eli $x_j \perp x_k$, kun $j \neq k$, niin*

$$\| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \cdots + \| x_n \|^2.$$

Huomautus. Kun kolmiossa $a = \| x \|$ ja $b = \| y \|$, niin $c = \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2}$, joten tapaus $n = 2$ on alkeisgeometriasta tuttu lause $a^2 + b^2 = c^2$.



Todistus. Väite osoitetaan induktiolla muuttujan n suhteen. Kun $n = 2$ ja $x \perp y$ niin,

$$\| x + y \|^2 = (\, x + y \,|\, x + y \,) = \| x \|^2 + (\, x \,|\, y \,) + (\, y \,|\, x \,) + \| y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2.$$

Oletetaan, että väite on osoitettu, kun $n = k$. Tällöin kohdan $n = 2$ ja induktiooletuksen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} \| x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} \|^2 &= \| x_1 + \cdots + x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2 \\ &\overset{\text{ind.ol.}}{=} \| x_1 \|^2 + \cdots + \| x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2, \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus on voimassa, sillä

$$(\, x_1 + \cdots + x_k \,|\, x_{k+1} \,) = \sum_{j=1}^{k} (\, x_j \,|\, x_{k+1} \,) = 0,$$

eli $(x_1 + \cdots + x_k) \perp x_{k+1}$. $\square$

Tilanteissa, joissa avaruuden vektoripari ei ole kohtisuorassa, voimme korvata Pythagoraan suunnikasyhtälöllä. (Piirrä ao. lauseesta esimerkkikuva!)

4.9. **Lause** (Suunnikasyhtälö). *Jos E on sisätuloavaruus ja $x, y \in E$, niin*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

Todistus. Lasketaan suoraan

$$\begin{aligned} \| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 &= (\, x + y \,|\, x + y \,) + (\, x - y \,|\, x - y \,) \\ &= (\, x \,|\, x \,) + (\, x \,|\, y \,) + (\, y \,|\, x \,) + (\, y \,|\, y \,) \\ &+ (\, x \,|\, x \,) - (\, x \,|\, y \,) - (\, y \,|\, x \,) + (\, y \,|\, y \,) \\ &= 2(\| x \|^2 + \| y \|^2) \end{aligned}$$

□

Suunnikasyhtälön avulla voidaan helposti tarkistaa, että monet konkreettiset Banachin avaruudet *eivät* ole Hilbertin avaruuksia (eli normi *ei* voi tulla sisätulosta).

4.10. **Esimerkki.** $(\ell^1, \| \cdot \|_1)$ ja $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia.

Ratkaisu: Olkoon $x = (1, 0, 0, \dots),\ y = (0, 1, 0, \dots) \ \in \ell^1$. Tällöin

$$\begin{aligned} \| x + y \|_1 &= \| (1, 1, 0, \dots) \|_1 = 2, \\ \| x - y \|_1 &= \| (1, -1, 0, \dots) \|_1 = 2, \\ \| x \|_1 &= \| y \|_1 = 1, \end{aligned}$$

joten

$$\| x + y \|_1^2 + \| x - y \|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \ \neq 4 = 2(\| x \|_1^2 + \| y \|_1^2).$$

Siispä ℓ^1 ei ole sisätuloavaruus. Olkoon nyt $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \le x \le \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} - x, & \text{kun } \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{kun } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Asetetaan $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = h(x)$ ja $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = h(x - \frac{1}{2})$. Tällöin $f, g \in C(0,1)$ ja $\| f \|_\infty = \| g \|_\infty = \frac{1}{4}$. Lisäksi $\| f + g \|_\infty = \| f - g \|_\infty = \frac{1}{4}$, joten

$$\| f + g \|_\infty + \| f - g \|_\infty = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = 2(\| f \|_\infty + \| g \|_\infty).$$

Siispä $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$ ei myöskään ole sisätuloavaruus. □

4.11. **Määritelmä.** Jos $A \subset E$, niin joukon A *ortokomplementti* $A^\perp$ on joukko

$$A^\perp := \{\, y \in E : \ (\, x \,|\, y \,) = 0 \text{ kaikilla } x \in A \,\}.$$

Ortokomplementin ominaisuuksia varten tarvitsemme seuraavan aputuloksen.

4.12. **Lause.** *Ehto $(x,y) \mapsto (\, x \,|\, y \,)$ määrää jatkuvan kuvauksen $E \times E \to \mathbb{K}$.*

Todistus. Jos $x_0 \in E$ ja $y_0 \in E$, niin kolmioepäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}|(\, x \,|\, y \,) - (\, x_0 \,|\, y_0 \,)| &= |(\, x - x_0 \,|\, y - y_0 \,) + (\, x - x_0 \,|\, y_0 \,) + (\, x_0 \,|\, y - y_0 \,)| \\ &\le \|\, x - x_0 \,\|\, \|\, y - y_0 \,\| + \|\, x_0 - x \,\|\, \|\, y_0 \,\| + \|\, x_0 \,\|\, \|\, y - y_0 \,\|,\end{aligned}$$

missä oikea puoli $\to 0$, kun $x \to x_0$ ja $y \to y_0$. □

Käy ilmi, että monimutkaisenkin osajoukon A ortokomplementti on hyvin säännöllinen:

4.13. **Lause.** *Jos $A \subset E$, niin sen ortokomplementti $A^\perp$ on avaruuden E suljettu aliavaruus.*

Todistus. Joukko $A^\perp$ on avaruuden E aliavaruus: Jos $y_1, y_2 \in A^\perp$, niin

$$(\, x \,|\, y_1 + y_2 \,) = (\, x \,|\, y_1 \,) + (\, x \,|\, y_2 \,) = 0 + 0 = 0$$

kaikilla $x \in A$, joten $y_1 + y_2 \in A^\perp$. Vastaavasti

$$(\, x \,|\, \lambda y_1 \,) = \overline{\lambda}(\, x \,|\, y_1 \,) = 0$$

kaikilla $x \in A$, joten $\lambda y_1 \in A^\perp$. Siispä $A^\perp$ on aliavaruus.

Seuraavaksi huomataan, että jos $x \in E$ niin $x^\perp$ on jatkuvan funktion $y \mapsto (\, x \,|\, y \,)$ alkukuva nollasta. Siispä joukko $x^\perp$ on suljettu. Näin ollen mielivaltaisella $A \subset E$,

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$$

on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu. □

Huomautus.

a) Nolla-alkion $\bar{0}$ ortokomplemetti on E eli $\{\bar{0}\}^\perp = E$.

b) Koko avaruuden E ortokomplemetti on $\{\bar{0}\}$ eli $E^\perp = \{\bar{0}\}$. Tämä seuraa siitä, että jos $y \in E^\perp$, niin $(\, x \,|\, y \,) = 0$ kaikilla $x \in E$. Erityisesti $(\, y \,|\, y \,) = \|\, y \,\|^2 = 0$, joten $y = \bar{0}$.

c) Sama päättely antaa: jos $y \in A \cap A^\perp$, niin $y = \bar{0}$.

Olemme osoittaneet myös seuraavan hyödyllisen havainnon.

4.14. **Lause.** *Jos* $(\,x \,|\, y_1\,) = (\,x \,|\, y_2\,)$ *kaikilla* $x \in E$*, niin* $y_1 = y_2$*.*

Todistus. Koska $0 = (\,x \,|\, y_1 - y_2\,)$ kaikilla $x \in E$, niin $y_1 - y_2 \in E^{\perp} = \{\bar{0}\}$. □

Seuraavaksi alamme tarkastella minimointitehtäviä. Näillä on monia sovelluksia, esimerkiksi differentiaaliyhtälöistä aina käytännön prosessien optimointiin asti. Kun tilanteita mallinnetaan Hilbertin avaruuksilla tulee tehtäväksi selvittää, millä ehdoin joukoista löytyy minimoivia alkioita. Koska avaruutemme ovat ääretönulotteisia, minimien olemassaolo ei ole ollenkaan selvää, kuten seuraava yksinkertainen esimerkki näyttää.

4.15. **Esimerkki.** Olkoon $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$; siis jonon n:s termi $= 1$. Jos $A = \{\, \frac{n+2}{n+1} e_n : \ n \in \mathbb{N} \,\}$, tällöin A on suljettu ja rajoitettu; kuitenkaan ei löydy sellaista vektoria $x \in A$, jolle olisi

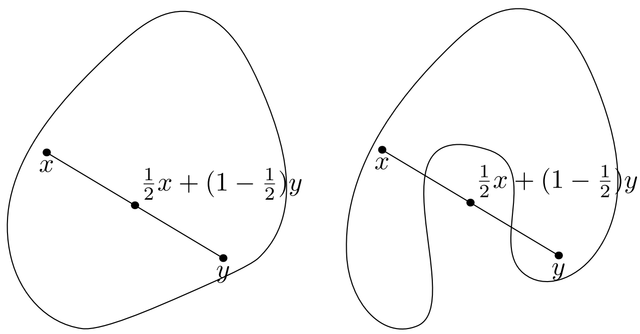
$$\|\, x \,\| = \inf\{\, \|\, y \,\| : \ y \in A \,\} = 1.$$

Joukkojen kompaktisuus tietysti takaisi minimoivien alkioiden olemassaolon, mutta ääretönulotteisissa avaruuksissa tämä oletus olisi aivan liian rajoittava. On itse asiassa yllättävää, että Hilbertin avaruuksissa minimointitehtävä ratkeaa suhteellisen yleisesti. Olennainen ominaisuus tällaisissa minimointitehtävissä on *konveksisuus.*

Muistetaan, että pisteiden x ja y välinen *yhdysjana* on joukko

$$\{\, x + t(y - x) : \ t \in [0,1] \,\} = \{\, tx + (1 - t)y : \ t \in [0,1] \,\}.$$

4.16. **Määritelmä.** Vektoriavaruuden E osajoukko A on *konveksi*, jos pisteiden $x, y \in A$ yhdysjana aina sisältyy joukkoon A eli jos $tx + (1-t)y \in A$ aina, kun $x, y \in A$ ja $0 \le t \le 1$.



Kuva 5. Konveksi joukko (vasemmalla) ja ei-konveksi joukko (oikealla); Kuvassa myös pisteiden x ja y väliset yhdysjanat.

4.17. **Lause.** *Jos F on Hilbertin avaruuden E konveksi suljettu osajoukko, niin on olemassa* täsmälleen yksi *normin minimoiva alkio $x_0 \in F$, eli alkio $x_0 \in F$ joka toteuttaa ehdon*

$$\| x_0 \| \leq \| x \| \text{ kaikilla } x \in F.$$

Todistus. Olkoon $\delta = \inf\{ \| x \| : x \in F \}$.

Sovelletaan suunnikasyhtälöä $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2$ vektoreihin $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, kun $x, y \in F$. Tästä seuraa, että

$$\frac{1}{4}\| x-y \|^2 = \frac{1}{2}\| x \|^2 + \frac{1}{2}\| y \|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2.$$

Koska konveksisuuden nojalla $\frac{1}{2}(x+y) \in F$, niin

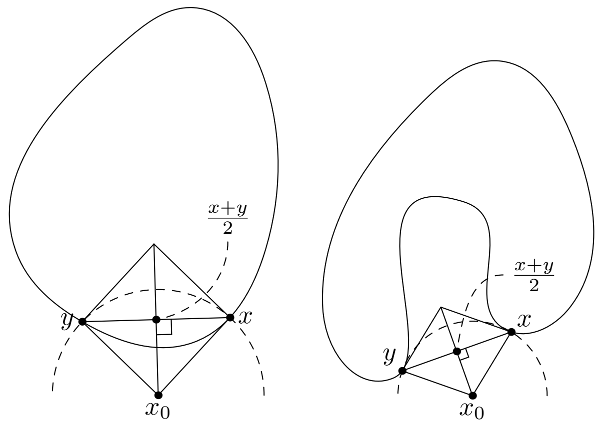
$$(*) \qquad \| x-y \|^2 \leq 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 - 4\delta^2.$$

Jos nyt $\| x \| = \| y \| = \delta$, niin arvion $(*)$ nojalla $\| x-y \|^2 \leq 0$, joten $x = y$. Siis normin minimoiva alkio on ainakin yksikäsitteinen, jos se on olemassa.

Olemassaoloa varten valitaan sellainen jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, että $\| x_n \| \to \delta$, kun $n \to \infty$. Korvataan x ja y arviossa $(*)$ jonon alkioilla x_n ja x_m. Silloin $\| x_n - x_m \| \to 0$, kun $n, m \to \infty$. Siispä $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono Hilbertin avaruudessa E, joten $x_n \to x_0 \in E$, kun $n \to \infty$. Koska normi on jatkuva funktio, niin

$$\| x_0 \| = \lim_{n\to\infty} \| x_n \| = \delta.$$

Koska F on suljettu ja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, niin raja-alkio $x_0 \in F$. □



Kuva 6. Minimointiongelman yksikäsitteisyyden geometrinen ajatus konveksille joukolle (vasemmalla) ja ei-konveksille joukolle (oikealla)

Edellinen lause voidaan muotoilla myös invariantisti, niin ettei origolla ole erikoisasemaa.

4.18. **Seuraus.** *Olkoon E Hilbertin avaruus, F sen suljettu konveksi osajoukko sekä $x \in E$. Silloin on täsmälleen yksi alkio $y_0 \in F$, jolle*

$$\| x - y_0 \| = \operatorname{dist}(x, F)$$

Tässä $\operatorname{dist}(x, F) = \inf\{ \| x - y \| : \ y \in F \}$ *on x:n etäisyys F:stä.*

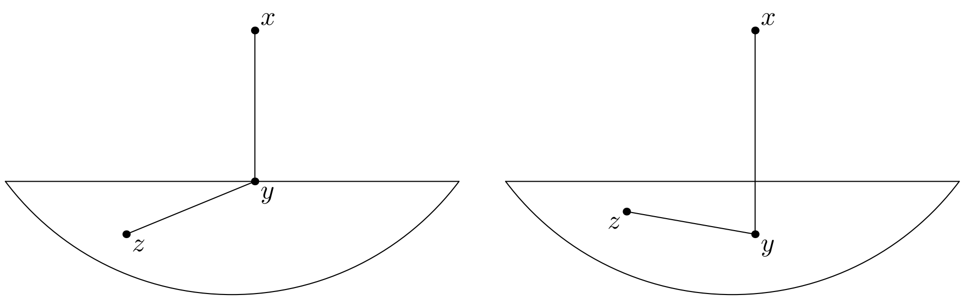
Todistus. Joukko $x - F$ on suljettu ja konveksi, sekä

$$\min\{ \| x - y \| : \ x - y \in x - F \} = \min\{ \| x - y \| : \ y \in F \}.$$

Nyt väite seuraa suoraan Lauseesta 4.17. □

Yo. lauseilla on suoraan sovelluksia konveksissa optimoinnissa, mutta niitä voidaan käyttää monissa muissakin minimointitehtävissä, esim. variaatiolaskennassa.

Olemme todistaneet minimoivan alkion y_0 olemassaolon ja yksikäsitteisyyden, mutta se voidaan myös helposti tunnistaa ! Seuraava lause kertoo, että $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, F)$ jos ja vain jos vektoreiden $x - y$ ja $z - y$ välinen kulma on tylppä kaikilla $z \in F$.
[Muista, että ($\mathbb{R}$-kertoimisessa) Hilbertin avaruudessa kahden vektorin a ja b välinen kulma $\varphi \in [0, 2\pi)$ saatiin ehdosta $(a \,|\, b) = \| a \| \, \| b \| \cos \varphi$.]



KUVA 7. vasemmalla tylppä kulma; oikealla terävä

4.19. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus sekä $F \subset E$ sen suljettu konveksi ja epätyhjä osajoukko. Olkoon myös $x \in E$ ja $y \in F$.*

Tällöin $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, F) \quad \Leftrightarrow \quad$ *kaikilla* $z \in F$ *pätee* $\operatorname{Re}(x - y \,|\, z - y) \le 0$.

Todistus. Olkoon $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, F)$. Jos $z \in F$ ja $0 < \lambda < 1$, niin konveksisuuden nojalla $y + \lambda(z - y) \in F$. Siispä

$$\| x - y - \lambda(z - y) \|^2 \ge \| x - y \|^2,$$

eli

$$\| x - y \|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(x - y \mid z - y) + |\lambda|^2 \| z - y \|^2 \geq \| x - y \|^2.$$

Saamme tästä $\operatorname{Re}(x-y \mid z-y) \leq (\lambda/2)\| z-y \|^2$ kaikilla $0 < \lambda < 1$. Antamalla $\lambda \to 0$ nähdään, että $\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leq 0$.

Oletetaan sitten, että $\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leq 0$ kaikilla $z \in F$. Siis

$$\begin{aligned} \| x - z \|^2 &= \| x - y - (z - y) \|^2 \\ &= \| x - y \|^2 - 2\operatorname{Re}(x - y \mid y - z) + \| z - y \|^2 \\ &\geq \| x - y \|^2 \end{aligned}$$

kaikilla $z \in F$. Silloin y on normin minimoiva alkio, joten $\| x-y \| = \operatorname{dist}(x, F)$. Lause on näin todistettu. □

Ortogonaaliset projektiot

Sovellamme seuraavaksi minimointilausetta 4.18 tapaukseen, missä F on suljettu vektorialiavaruus. Tämä johtaa ortoprojektioihin, jotka tulevat olemaan lineaarisia kuvauksia.

4.20. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Kun $x \in E$ ja $y \in M$,*

$$\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y) \perp M.$$

Todistus. Olkoon ensin $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M)$. Jos $z \in M$ sekä $\lambda \in \mathbb{K}$, niin lineaarinen yhdiste $y + \lambda z \in M$ ja Lauseen 4.19 nojalla

$$0 \geq \operatorname{Re}\left((x - y \mid (y + \lambda z) - y)\right) = \operatorname{Re}\left(\overline{\lambda}(x - y \mid z)\right)$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$. Kun valitaan $\lambda = (x - y \mid z)$, niin tästä seuraa, että

$$|(x - y \mid z)|^2 \leq 0$$

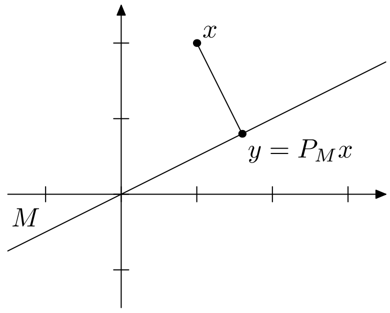
eli $(x - y \mid z) = 0$ kaikilla $z \in M$. Toisin sanoen, $x - y \in M^\perp$.

Oletetaan nyt, että $x - y \in M^\perp$. Jos $z \in M$, niin $z - y \in M$ ja siten $0 = \operatorname{Re}(x - y \mid z - y)$ kaikilla $z \in M$. Lauseen 4.19 nojalla tästä seuraa, että $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M)$. □

Kun M on avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, olkoon $P_M : E \to E$ kuvaus, joka liittää vektoriin x sen yksikäsitteisen vektorin $y \in M$, joka minimoi x:n etäisyyden M:ään. Siis

$$P_M(x) = y\,, \qquad \text{kun} \quad \| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M) \tag{4.21}$$

Sanomme, että kuvaus P_M on avaruuden E *ortoprojektio* aliavaruudelle M ja $y = P_M x$ on vektorin x ortoprojektio avaruudelle M.



Huomautus. Havaitaan lisäksi, että Lause 4.20 antaa seuraavanlaisen tavan karakterisoida vektorin x ortoprojektio:

$$y = P_M x \quad \text{joss} \quad y \in M \ \text{ ja } \ x - y \perp M. \tag{4.22}$$

Toisin sanoen, ehdon (4.22) mukaan ortoprojektion määräävät seuraavat kaksi ehtoa,

$$P_M x \in M \quad \text{ja} \quad P_M x - x \in M^{\perp} \tag{4.23}$$

jotka ovat siis voimassa kaikilla Hilbert avaruuden E vektoreilla x.

Ylläolevista tuloksista saadaan erityisesti

$$P_M x = \bar{0} \ \text{ kun } x \in M^{\perp}, \quad P_M x = x \ \text{ kun } x \in M \tag{4.24}$$

Jos nimittäin $x \in M^{\perp}$, niin $P_M x = (P_M x - x) + x \in M^{\perp}$, ja siis $P_M x \in M \cap M^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Jälkimmäinen väite seuraa suoraan määritelmästä (4.21).

Määrittelimme yllä ortoprojektion puhtaasti *metrisenä* suureena, mutta Hilbert avaruuden vektoriavaruus-struktuurin takia päädymme lineaariseen operaattoriin.

4.25. **Lause.** *Olkoon M suljettu vektorialiavaruus Hilbertin avaruudessa E. Silloin ortoprojektio $P_M : E \to E$ on lineaarinen kuvaus.*

Todistus. Lineaarisuuden havaitsemiseksi käytetään esitystä

$$x + \lambda y = \underbrace{P_M x + \lambda P_M y}_{:= z \in M} + \underbrace{(x - P_M x) + \lambda(y - P_M y)}_{\in M^{\perp}},$$

kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Esityksestä nähdään, että $x + \lambda y - z \perp M$ ja $z \in M$, joten ehdon (4.22) nojalla $P_M(x+\lambda y) = z = P_M x + \lambda P_M y$. Siis P_M on lineaarinen. □

Lineaarialgebrasta muistamme, että lineaarikuvaus $P\colon E \to E$ on *projektio*, jos $P^2 = P$. Mikäli $U = P(E)$ ja $V = \ker P$, sanomme että P on projektio *avaruudelle U suuntaan V*.

Läheinen lineaarialgebran käsite on nk. suora summa. Sanomme, että E on aliavaruuksien U ja V *suora summa*, merkitään $E = U \oplus V$, jos $E = U + V$ ja $U \cap V = \{\bar{0}\}$. Voidaan osoittaa, että jos P on projektio avaruudelle U suuntaan V, niin $E = U \oplus V$. Ja kääntäen, jos $E = U \oplus V$, niin suora summa määrittelee projektion P avaruudelle U suuntaan V. Nimittäin silloin jokaisella $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys $x = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$. Asetetaan tällöin $P(x) = u$; nyt $U = P(E)$ ja $V = \ker P$ [Näiden väitteiden (helpot) yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi harjoitustehtäväksi].

4.26. **Lause.** *Jos M on Hilbertin avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin $E = M \oplus M^{\perp}$ ja P_M on avaruuden E projektio aliavaruudelle M suuntaan $M^{\perp}$. Lisäksi*

$$\| P_M x \| \leq \| x \| \quad \textit{kaikilla } x \in E.$$

Todistus. Lauseesta 4.13 sivulla 57 muistetaan, että $M^{\perp}$ on avaruuden E vektorialiavaruus. Lisäksi (4.23) osoitti että jokainen $x \in E$ voidaan hajottaa summaksi $x = P_M x + x - P_M x$, missä $P_M x \in M$ ja $x - P_M \in M^{\perp}$. Siis $E = M + M^{\perp}$. Edelleen havaitaan, että tämä summa on suora: jos $x \in M \cap M^{\perp}$, niin $\| x \|^2 = (x \,|\, x) = 0$, joten $x = \bar{0}$. Siispä $M \cap M^{\perp} = \{\bar{0}\}$ ja $E = M \oplus M^{\perp}$.

Seuraavaksi tarkastellaan esitystä $x = P_M x + z$, missä $z = x - P_M x \in M^{\perp}$. Koska edellä osoitimme että $P_M z = \bar{0}$, niin lineaarisuuden avulla saadaan

$$P_M x = P_M(P_M x + z) = P_M^2 x + P_M z = P_M^2 x.$$

Siis P_M on projektio. Ehto $P_M(E) = M$ seuraa kaavasta (4.22) [valitaan $y = x$], samoin ehto $\ker(P_M) = M^{\perp}$ [kun valitaan $y = 0$].

Lopuksi, normiarviota varten käytetään Pythagoras'n lausetta,

$$\| x \|^2 = \| P_M x + (x - P_M x) \|^2 = \| P_M x \| + \| x - P_M x \|^2 \geq \| P_M x \|^2,$$

joten väite seuraa. □

4.27. *Huomautus.* Lauseesta 4.26 seuraa myös, että ortoprojektio P_M on jatkuva, ja että itse asiassa $\| P_M \| = 1$ kun $M \neq E$ (Miksi ? !).

Ortonormaalit kannat

4.28. **Määritelmä.** Sisätuloavaruuden jono (e_n) on *ortonormitettu*, jos

$$(e_i \,|\, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Toisin sanoen, jono (e_j) on ortonormeerattu, jos sen vektorit ovat pareittain kohtisuorassa ja $\| e_j \| = 1$ jokaisella j.

4.29. **Esimerkki.**

a) Kanoniset kantavektorit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \ell^2$, missä nollasta eroava termi on n:s, $n \in \mathbb{N}$, muodostavat ortonormitetun jonon avaruudessa ℓ^2.

b) $E = L^2(0, 2\pi)$ varustettuna sisätulolla

$$(x \,|\, y) = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t,$$

on Hilbert avaruus; jono (x_n),

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \quad n \in \mathbb{Z},$$

on ortonormitettu jono avaruudessa E (Miksi ?).

Ortonormaaleja jonoja ja niiden määräämiä vektorisummia voi helposti kontrolloida tärkeän Besselin epäyhtälön avulla.

Lause (Besselin epäyhtälö)**.** *Jos* (e_n) *on ortonormeerattu jono Hilbertin avaruudessa* E*, niin*

$$\text{(B)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |(x \,|\, e_k)|^2 \le \| x \|^2$$

kaikilla $x \in E$*. Erityisesti,*

$$\lim_{k \to \infty} (x \,|\, e_k) = 0.$$

Todistus. Jos (e_n) on ortonormitettu avaruudessa E ja $x \in E$, niin tarkastellaan ensin äärellisiä osasummia. Ottamalla sisätulo termeittäin saadaan

$$\text{(4.30)} \qquad \Big(\sum_{k=0}^{n} (x \,|\, e_k) e_k - x \;\Big|\; e_j \Big) = (x \,|\, e_j) - (x \,|\, e_j) = 0, \quad j = 0, \dots, n$$

Toisin sanoen, erotus $x - \sum_{k=0}^{n} (x \,|\, e_k) e_k$ on kohtisuorassa vektoreita e_j vastaan, kaikilla $0 \le j \le n$. Siten Pythagoraan lauseen mukaan

$$\text{(4.31)} \qquad \begin{aligned} \| x \|^2 &= \Big\| x - \textstyle\sum_{k=0}^{n} (x \,|\, e_k) e_k \Big\|^2 + \Big\| \textstyle\sum_{k=0}^{n} (x \,|\, e_k) e_k \Big\|^2 \\ &\ge \Big\| \textstyle\sum_{k=0}^{n} (x \,|\, e_k) e_k \Big\|^2 = \textstyle\sum_{k=0}^{n} |(x \,|\, e_k)|^2 \end{aligned}$$

Huomaa, että myös viimeinen yhtäsuuruus perustui Pythagoraan lauseeseen (ja siihen että vektorit e_j ovat ortonormeerattuja, $\| e_j \| = 1$ jokaisella j).

Olemme siis näyttäneet, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{k=0}^{n} |(x \,|\, e_k)|^2 \le \| x \|^2$$

Antamalla lopuksi $n \to \infty$ saadaan Besselin epäyhtälö (B). $\square$

4.32. **Määritelmä.** Jos (e_n) on ortonormitettu jono Hilbertin avaruudessa E ja $x \in E$, niin lukuja $(\, x \,|\, e_k \,)$ sanotaan vektorin x *Fourier-kertoimiksi* jonon (e_n) suhteen.

Jos E on vektoriavaruus ja $A \subset E$, niin merkitään $\mathrm{span}\,(A)$:lla joukon A virittämää avaruuden E vektorialiavaruutta, eli

$$\mathrm{span}\,(A) := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \; n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i \in A \}.$$

Edelleen $\overline{\mathrm{span}}\,(A)$ on aliavaruuden $\mathrm{span}\,(A)$ sulkeuma avaruudessa E.

Olkoon $(e_0, \ldots, e_n)$ äärellinen ortonormeerattu jono Hilbertin avaruudessa E. Besselin epäyhtälö pätee tietysti myös tällaiselle jonolle (vrt. yo. todistus); seurauksena saamme

4.33. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus, $(e_j)_{j=0}^n \subset$ äärellinen ortonormeerattu jono sekä $M = \mathrm{span}\,(\{e_0, \ldots, e_n\})$. Tällöin*

a) M on suljettu E:n vektorialiavaruus, $M = \overline{\mathrm{span}}\,(\{e_0, \ldots, e_n\})$.

b) M:n ortoprojektiolla on seuraava konkreettinen esitys,

$$Px = \sum_{k=0}^{n} (\, x \,|\, e_k \,)\, e_k, \quad x \in E \tag{4.34}$$

Todistus. Kaavan (4.34) määrittelemä kuvaus on selvästi lineaarinen. Pythagoraan ja Besselin epäyhtälön nojalla $\|\, Px \,\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |(\, x \,|\, e_k \,)|^2 \leq \|\, x \,\|^2$. Siten P on jatkuva.

Toisaalta, jos $x \in M$,

$$x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, e_k$$

joillakin skalaareilla $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Ottamalla tästä sisätulo e_j:n kanssa, saadaan ortogonaalisuuden nojalla $\lambda_j = (\, x \,|\, e_j \,)$, $j = 0, \ldots, n$. Mutta tämä sanoo, että $Px = x$ jokaisella $x \in M$. Niinpä

$$M \; = \; \{x \in E : Px = x\} \; = \; \ker(I - P),$$

missä I on avaruuden E identtinen kuvaus. Jatkuva kuvauksen ytimenä M on näin ollen suljettu v.a.a.

Lopuksi, kuten yhtälössä (4.30) nähdään, että

$$e_j \perp \Big(x - \sum_{k=0}^{n} (\, x \,|\, e_k \,)\, e_k \Big) = 0, \qquad j = 0, \ldots, n,$$

eli yhtäpitävästi $x - Px \in M^{\perp}$, $x \in E$. Mutta Lauseen 4.20 mukaan ehdot $Px \in M$ ja $x - Px \in M^{\perp}$ karakterisoivat ortoptojektion; vrt. myös (4.22). Olemme näin todistaneet myös väitteen *b*). □

4.35. *Huomautus.* a) Pätee yleisesti: Jokaisessa Banachin avaruudessa jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu [Tähän (ehkä) palataan myöhemmin].

b) Lineaarialgebran kurssilta tunnetulla Gramm-Schmidtin menetelmällä jokaiseen Hilbert-avaruuden äärellisulotteiseen aliavaruuteen M voidaan konstruoida ortonormaali kanta; tällöin Lause 4.33 antaa konkreettisen lausekkeen M:n ortoprojektiolle; vrt. myös Harjoitukset 6.

c) Voimme nyt yhdistää Lauseet 4.20 ja 4.33, ja saamme seuraavan tulkinnan: Jokaisella $x \in E$, funktio

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \Big\| x - \sum_0^n \lambda_k e_k \Big\|$$

saa pienimmän arvonsa *täsmälleen* (!) silloin, kun

$$\lambda_k = (\, x \,|\, e_k \,), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Edelleen, ortonormeeratuista vektoreista muodostettujen sarjojen summautuminen riippuu vain kerroinjonon ominaisuuksista (yleisissä Banach-avaruus summissa tilanne ei ole lainkaan yhtä helppo):

4.36. **Lause.** *Olkoon $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortonormeerattu jono Hilbertin avaruudessa E. Jos $\lambda_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\textit{sarja } \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k \textit{ suppenee jos ja vain jos } \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty.$$

Tällöin pätee

$$\Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \Big\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Todistus. Jos $p, q \in \mathbb{N}$ ja $p < q$, niin Pythagoras'n lauseen nojalla

$$\Big\| \sum_{k=0}^{q} \lambda_k e_k - \sum_{k=0}^{p} \lambda_k e_k \Big\|^2 = \Big\| \sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} |\lambda_k|^2.$$

Siis osasummat $s_n = \sum^n \lambda_k e_k$ muodostavat Cauchyn jonon avaruudessa E jos ja vain jos sarja $\sum |\lambda_k|^2$ suppenee. Tämä osoittaa väitteen ensimmäisen osan. Jos nyt

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k,$$

niin sisätulon jatkuvuuden nojalla

$$(x \mid e_j) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k \;\Big|\; e_j \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (e_k \mid e_j) = \lambda_j ,$$

mistä

$$\| x \|^2 = (x \mid x) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k e_k \;\Big|\; x \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (e_k \mid x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda}_k = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2$$

□

4.37. **Seuraus** (Riesz–Fisherin lause). *Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormeerattu jono. Jos $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty} \in \ell^2$, niin löytyy sellainen $x \in E$, että*

$$(x \mid e_k) = \lambda_k , \qquad \textit{kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

4.38. **Määritelmä.** Hilbertin avaruuden E ortonormitettu jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *Hilbertin kanta* avaruudessa E, jos

$$\overline{\operatorname{span}}\,(\{\, e_n : \ n \in \mathbb{N} \,\}) = E.$$

Huomautus. Jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta jos ja vain jos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E.

Todistus. Jos $M = \overline{\operatorname{span}}\,(\{\, e_n : \ n \in N \,\})$, niin $M \neq E \iff M^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että löytyy $x \in M^{\perp}$, jolle $\| x \| = 1$. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että joukko $\{x\} \cup \{\, e_n : \ n \in \mathbb{N} \,\}$ on ortonormaali $\iff$ M ei ole maksimaalinen orton. joukko avaruudessa E. □

Seuraava lause on keskeinen Hilbertin avaruuksien teoriassa ja sovelluksissa.

4.39. **Lause.** *Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa E. Silloin seuraavat viisi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

a) jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa E,

b) sisätulot $(x \mid e_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$,

c) jokaisella $x \in E$ on $x = \sum_{n=0}^{\infty} (x \mid e_n)\, e_n$, [suppeneminen normin mielessä]

d) jokaisella $x \in E$ on voimassa

$$\| x \|^2 = \sum_{n} |(x \mid e_n)|^2,$$

e) jokaisella $x, y \in E$ on voimassa

$$(x \mid y) = \sum_{n} (x \mid e_n) \overline{(y \mid e_n)}.$$

Huomautus. Ehtoa e) sanotaan *Parsevalin yhtälöksi* ja ehtoa d) *Plancherelin kaavaksi.* Kohta c) taas tarkoittaa, että jokaisella $x \in E$ pätee

$$\| x - \sum_{n=0}^{N} (x \,|\, e_n)\, e_n \| \to 0, \quad \text{kun } N \to \infty.$$

Todistus. Käymme läpi vain tapauksen $\operatorname{card}(\{e_n\}) = \infty$, äärellisulotteinen tapaus jää harjoitustehtäväksi.

Ortokomplementin määritelmästä $A^\perp = \{x \in E : (x, a) = 0 \ \forall\, a \in A\}$ huomataan (Miten ?), että aina $\overline{A}^{\,\perp} = A^\perp$; tässä $\overline{A}$ on A:n sulkeuma. Erityisesti, jos $M = \overline{\operatorname{span}}\,(\{e_n\})$, niin b) on yhtäpitävää ehdon $M^\perp = \{\bar{0}\}$ kanssa. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa että $M = E$, vrt. Lause 4.26. Toisin sanoen, a) ja b) ovat yhtäpitäviä.

Helposti havaitaan, että

$$e) \implies d) \implies b).$$

Käänteiseen suuntaan osoitetaan ensin, että ehto b) implikoi c):n. Oletetaan siis, että ehto b) on voimassa. Jos $x \in E$, niin olkoon

$$\widehat{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n)\, e_n,$$

mikä Besselin epäyhtälön ja Lauseen 4.36 nojalla suppenee avaruudessa E. Nyt kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$(\widehat{x} \,|\, e_k) = \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=0}^{N} (x \,|\, e_n)\, e_n \,\Big|\, e_k \Big) = (x \,|\, e_k)$$

eli $(\widehat{x} - x \,|\, e_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten ehdon b) nojalla $x = \widehat{x}$. Olemme siis näyttäneet, että c) pätee.

Lopuksi, näytetään $c) \implies e)$. Koska oletuksen mukaan

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n)\, e_n$$

kaikilla $x \in E$, on siis

$$\begin{aligned}(x \,|\, y) &= \lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=0}^{N} (x \,|\, e_n)\, e_n \,\Big|\, y \Big) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (x \,|\, e_n)(e_n \,|\, y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n)(e_n \,|\, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x \,|\, e_n)\overline{(y \,|\, e_n)}.\end{aligned}$$

$\square$

Jos Hilbertin avaruudessa E ylipäätään on Hilbertin kanta, niin selvästi E on separoituva. Käy ilmi että tämä onkin ainoa rajoite Hilbertin kannan löytymiselle.

4.40. **Lause.** *Jokaisessa separoituvassa Hilbertin avaruudessa E on Hilbertin kanta.*

Todistus.

1°) Oletetaan, että $\dim E = n+1 < \infty$. Silloin avaruudella E on kanta $(x_k)_{k=0}^n$. Käyttämällä Lineaarialgebrasta tuttua Gramm-Schmidtin menetelmää voidaan tästä kannasta konstruoida uusi, ortonormaali kanta. Tämä on tehty yksityiskohtaisesti esim. Honkasalon monisteessa s. 70, Lauseessa 3.3.3.

Kertaamme tässä lyhyesti Gramm-Schmidtin konstruktion: Olkoon

$$M_q = \operatorname{span}(\{\, x_j : \ 0 \le j \le q \,\})$$

ja merkitään $e_0 = \| x_0 \|^{-1} x_0$. Osoitetaan induktiolla muuttujan q suhteen, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta jokaisella $q = 0, 1, \ldots, n$. Väite seuraa tästä, kun $q = n$.

Tapaus $n = 0$ on selvä, joten oletetaan, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta $(e_j)_{j=0}^q$. Merkitään $y_{q+1} = x_{q+1} - P_q x_{q+1}$, missä P_q on avaruuden E ortoprojektio aliavaruudelle M_q. Koska jono (x_k) on lineaarisesti vapaa, on $y_{q+1} \ne \bar{0}$. Merkitään $e_{q+1} = \| y_{q+1} \|^{-1} y_{q+1}$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla joukko $\{e_0, \ldots, e_{q+1}\}$ muodostaa avaruuden M_{q+1} ortonormaalin kannan. Siispä väite on osoitettu.

2°) Oletetaan sitten, että $\dim E = \infty$. Koska E on separoituva, voimme löytää tiheän jonon $(x_n)_{n=0}^\infty$. Konstruoidaan induktiolla sellainen osajono (x_{k_j}), että kaikilla $p \in \mathbb{N}$ joukko $\{x_{k_0}, \ldots, x_{k_p}\}$ on lineaarisesti vapaa ja $x_m \in \operatorname{span}(\{x_{k_0}, \ldots, x_{k_p}\})$ aina, kun $m \le k_p$ (HT). Merkitään $y_j = x_{k_j}$. Edellisen kohdan ortonormeeraus-tekniikkaa soveltamalla jonoon (y_k) saamme konstruoitua avaruuteen E Hilbertin kannan.

□

Olkoon $(e_j)_{j \in \mathcal{J}}$ separoituva Hilbertin avaruuden kanta, missä $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ tai $\mathcal{J} = \{1, \ldots, N\}$. Tällöin jokaisella $x \in E$ on esitys

$$x = \sum_{k \in \mathcal{J}} (\, x \mid e_k \,)\, e_k.$$

Jos $(\lambda_k) \in \ell^2$ tai $(\lambda_k) \in \mathbb{K}^N$, määritellään lineaarikuvaus $T \colon \ell^2 \to E$ tai $T \colon \mathbb{K}^N \to E$ asettaen

$$T\big((\lambda_k)_{k \in \mathcal{J}}\big) = \sum_{k \in \mathcal{J}} \lambda_k e_k.$$

Tällöin T on *isomorphismi* $\ell^2 \to E$ tai $\mathbb{K}^N \to E$, sillä Lauseen 4.36 nojalla $\| Tx - Ty \| = \| x - y \|$ ja T on lineaaribijektio. Siis kaikki separoituvat Hilbertin avaruudet ovat isomorfismia vaille joko tyyppiä ℓ^2 tai $\mathbb{K}^N$!

4.41. **Esimerkkejä.**

a) *Haarin systeemi* $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ on ehkä helpoin tapa konstruoida Hilbertin kanta avaruuteen $L^2\,[0,1]$. Lähdemme tässä liikkeelle välin $[0,1]$ karakteristisesta funktiosta ja valitsemme $h_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, joka $= 1$, jos $x \in [0,1]$ ja $= 0$, jos $x \notin [0,1]$. Selvästi $\| h_0 \|_2 = 1$.

Muut kantafunktiot valitaan seuraavasti: Jos $0 \leq j < 2^k$, olkoon $n = 2^k + j$ ja

$$\Delta_n = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right] \subset [0,1],$$
$$\Delta_n^+ = \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1/2}{2^k} \right), \quad \Delta_n^- = \left(\frac{j+1/2}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right).$$

Asetetaan

$$h_n(t) = 2^{\frac{k}{2}} \left(\chi_{\Delta_n^+}(t) - \chi_{\Delta_n^-}(t) \right) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^+ \\ -2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^- \\ 0, & t \notin \Delta_n \end{cases}$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots$, $n = 2^k + j$ kuten edellä.
(Piirrä itsellesi neljän ensimmäisen Haarin funktion $h_0, \ldots, h_4$ kuvaajat !)

Näin muodostettu Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=1}^{\infty} \subset L^2\,[0,1]$ on Hilbertin kanta [Yksityiskohdat pitkähkö HT; tässä luonnosteltuna idea: Dyadisten välien Δ_n karakteristiset funktiot kuuluvat avaruuteen $\operatorname{span}(\{ h_n : n \in \mathbb{N} \}) \subset L^2\,[0,1]$ (Miksi ?); tästä voidaan päätellä että avointen joukkojen karakteristiset funktiot ovat sulkeumassa $\overline{\operatorname{span}}(\{ h_n : n \in \mathbb{N} \})$; mittateorian nojalla sulkeumaan saadaan näin kaikki karakteristiset funktiot; sen jälkeen yksinkertaiset funktiot, ja lopulta koko $L^2\,[0,1] = \overline{\operatorname{span}}(\{ h_n : n \in \mathbb{N} \})$].

Haarin kannan Fourier-kertoimet funktiolle $f \in L^2\,[0,1]$ saadaan kaavoista

$$(f \mid h_0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \quad (f \mid h_n) = 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\Delta_n^+} f\,\mathrm{d}t - \int_{\Delta_n^-} f\,\mathrm{d}t \right].$$

Siis kun $f \in L^2\,[0,1]$, niin

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f \mid h_n)\, h_n$$

ja sarja suppenee avaruudessa $L^2\,[0,1]$, so. L^2-normin mielessä.

b) Haarin systeemillä on seuraava mainio skaalausominaisuus,

$$h_n(x) = 2^{k/2}\, h_1(2^k x - j)$$

kun $n = j + 2^k$ kuten edellä. Tällaiset skaalaus-ominaisuudet helpottavat merkittävästi numerisointia. Toisaalta Haarin systeemin pulmana on se että kantafunktiot h_n ovat epäjatkuvia. Etsittäessä kantafunktioita, jotka ovat jatkuvia tai sileitä, ja joilla on samat skaalausominaisuudet, on päädytty niin sanottuihin *wavelet*-kantoihin, joita on viime aikoina on tutkittu erityisen paljon. Näillä on myös käytännön mielenkiintoa monissa sovelluksissa, jotka liittyvät muun muassa signaalinkäsittelyyn, kuvankäsittelyyn jne. Pulmana on ettei kompaktikantajaisella waveletillä (= funktion h_1 vastineella) ole esitystä alkeisfunktioiden avulla, paitsi sarjakehitelmänä. Esitämme siksi tässä vain kuvan tyypillisestä wavelet-kannasta. Esimerkiksi, jos ψ on ao. kuvan funktio

tähän tulee kuva!!

niin funktiot $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $j, k \in \mathbb{Z}$, muodostavat Hilbertin kannan L^2:ssa.

c) Mainitaan lopuksi vielä pari esimerkkiä; näitä ei kuitenkaan luennoilla käsitelty. Soveltamalla Lauseen 4.40 kohdan 1°) yhteydessä esiteltyä *Gramm–Schmidt* ortonormeeraus menetelmää polynomeihin saadaan Hilbertin kantoja moniin eri (painotettuihin) L^2-avaruuksiin. Esimerkiksi, olkoon

$$p_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\big((t^2-1)^n\big)$$

n:s *Legendren polynomi*. Differentiaali- ja integraalilaskennan peruskurssin avulla tiedämme, että

$$(\, p_n \,|\, p_k \,) = \int_{-1}^{1} p_n(t) p_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\delta_{nk},$$

missä δ_{nk} on *Kroneckerin δ-symboli* eli

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Merkitään $e_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, p_n$. Voidaan todistaa, että saatu jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2([-1,1])$. Jono voidaan konstruoida myös suoraan käyttämällä Gramm–Schmidtin menetelmää jonoon $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Olkoon

$$L^2(\Omega,\rho) := \{\, f : \int_\Omega |f(t)|^2 \rho(t)\,\mathrm{d}\mu < \infty \,\}, \quad \rho(t) = e^{-t^2}.$$

Hermiten polynomit

$$H_n(t) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2t)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$ ortonormaalin kannan. Myös tämä jono on saatu Gramm–Schmidtin menetelmällä jonosta $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

e) *Laguerren polynomit* määritellään kaavalla

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{t^k}{k!}, \quad \alpha > -1,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Systeemi $(L_n^{(\alpha)}(t))_{n=0}^{\infty}$ on ortonormaali kanta avaruudessa $L^2(\mathbb{R}_+, te^{-t})$.

5. Fourier-sarjat

Fourier esitti vuonna 1822 lämmönjohtamista koskevien tutkimusten yhteydessä kuuluisan menetelmänsä esittää mielivaltainen 2π-jaksollinen funktio kehitelmänä

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + \cdots .$$

Tästä nousee useita tärkeitä kysymyksiä, esimerkiksi suppeneeko sarja kohti funktiota f ja missä mielessä suppeneminen tapahtuisi? Lisäksi voidaan kysyä, määrääkö Fourier-sarja funktion f yksikäsitteisesti ja miten kertoimet c_n kuvaavat funktion f ominaisuuksia ? Nämä kysymykset ovat olleet keskeisiä (koko) analyysin kehityksessä. Tutkimme seuraavaksi, mitä voidaan Hilbertin avaruus-metodeilla tässä tapauksessa saada aikaan.

Esitarkasteluja. Olkoon $L^2 = L^2(0, 2\pi)$ ja $f \in L^2$. Kun $n \in \mathbb{Z}$, on f:n n:s *Fourier kerroin* mukavinta määritellä kaavalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x.$$

Nimittäin, jos

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n \left(\cos(nx) + i \sin(nx)\right),$$

eli f on *trigonometrinen polynomi*, tällöin

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x = \widehat{f}(n)$$

kuten summauksen ja integroinnin järjestyksen vaihtamalla helposti huomaa.

Fourier-kertoimet liittyvät tietysti myös ortonormaaliin jonoon

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

Nimittäin

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{e^{inx}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f \mid e_n \right)$$

Tässä sisätulo $(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$ on otettu avaruudessa $L^2(0{,}2\pi)$.

Jos $f \in L^2$ (tai jos $f \in L^p(0, 2\pi)$, $1 \le p < \infty$), sen n:s *Fourier-osasumma* on

$$s_n(x) \equiv s_n(f; x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad x \in [0{,}2\pi],$$

Huomaa, että summafunktio $s_n\,(f; x)$ on *pisteittäin* määritelty, koska funktio e^{ikx} on jatkuva kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

5.2. **Lemma.** *Fourier-osasummalle s_n on integraaliesitys*

$$s_n\,(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

missä

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\,(x/2)}$$

on n:s Dirichlet'n ydin, *kun $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Fourier-kertoimen $\widehat{f}(n)$ määritelmän nojalla

$$\begin{aligned} s_n\,(f;x) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\,e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\right)e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kun merkitään

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{ix}\right)^k.$$

Soveltamalla geometrisen summan kaavaa saadaan

$$D_n(x) = e^{-inx}\left(\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}},$$

joten kertomalla edellinen identiteetti puolittain termillä $e^{-ix/2}(e^{ix}-1)$, saadaan

$$\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)D_n(x) = e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}.$$

Eulerin kaava $e^{iz}-e^{-iz} = 2i\sin z$ antaa lopuksi

$$2i\sin(x/2)D_n(x) = 2i\sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right).$$

□

5.3. **Lemma.** *Olkoon*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

Tällöin

i) kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \textit{ja}$$

ii) funktio $K_n(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0,2\pi]$. Lisäksi

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)},$$

kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta$.

Huomautus. Aritmeettinen keskiarvo K_n on n:s *Fejérin ydin*. Ominaisuus (ii) kertoo, että Fejérin ytimet K_n ovat positiivisia ja $K_n \to 0$ tasaisesti, kun $n \to \infty$, kunhan x ei ole lähellä päätepisteitä 0 tai 2π. Dirichlet ytimillä D_n ei ole näitä ominaisuuksia. Tästä syystä Fourier-sarjojen *pisteittäisen* suppenemisen teoria on vaikeaa!

Todistus.

i) Koska

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,0},$$

on

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siispä sama väite pitää paikkaansa Dirichlet'n ytimien aritmeettiselle keskiarvolle K_n.

ii) Edellä osoitimme, että $(e^{ix}-1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$. Tämän vuoksi

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) = (e^{-ix}-1)\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}\right).$$

Yhtälön oikean puolen summa on kaksi geometrista summaa, joten edelleen hieman sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) &= -e^{i(n+1)x} + 1 - e^{-i(n+1)x} + 1 \\ &= 2 - 2\cos\left((n+1)x\right).\end{aligned}$$

Koska $\left(e^{ix}-1\right)\left(e^{-ix}-1\right) = 2\left(1-\cos x\right)$, saamme lopuksi

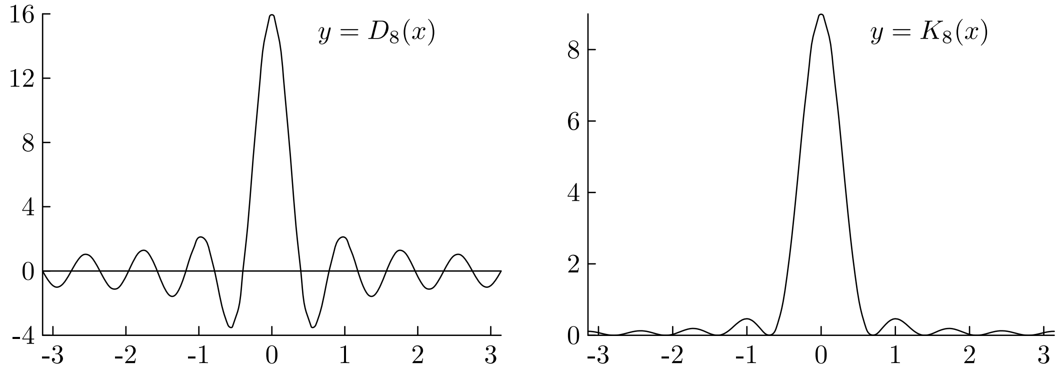
$$K_n(x) = \frac{1-\cos\left((n+1)x\right)}{(n+1)(1-\cos x)} \geq 0$$

Huomaa, että koska $\cos(t) \leq 1$ kaikilla t, Fejérin ydin on tosiaankin positiivinen. Edelleen, Fejérin ytimelle löydetystä esityksestä seuraa että

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}$$

kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta < 2\pi$.

□



Kuva 8. Dirichlet'n ja Fejérin ytimet ($n = 8$)

Seuraavaksi tutkimme Fejérin ytimien käyttäytymistä konvoluutioissa.

5.4. **Lause.** *Olkoon* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *jatkuva,* $f(0) = f(2\pi)$*, sekä*

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, \mathrm{d}t$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ *ja* $n \in \mathbb{N}$. *Silloin*

$$\| K_n * f - f \|_\infty = \sup_{x \in [0,2\pi]} |K_n * f(x) - f(x)| \to 0,$$

eli $K_n * f(x) \to f(x)$ tasaisesti*, kun* $n \to \infty$.

Todistus. (vrt Reaalianalyysi I) Oletuksen nojalla f on tasaisesti jatkuva ja se voidaan jatkaa 2π-periodisena koko reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$. Myös K_n on 2π-periodinen ja jatkuva, joten muuttujanvaihtoa $u = x - t$ soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} K_n * f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, \mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u)\, K_n(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)\, K_n(t)\, \mathrm{d}t \quad (= f * K_n(x)) \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x-u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikilla $|u| < \delta$ ja $x \in [0, 2\pi]$. Merkitään

$$M = \sup_{u \in (0,2\pi)} |f(u)| < \infty.$$

Lemman 5.3 kohdan *ii*) nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$0 \le K_n(u) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

kun $\delta \le u \le 2\pi - \delta$ ja $n \ge n_0$. Lemman 5.3 kohdan *ii*) ja konvoluutiokaavan $K_n * f = f * K_n$ avulla saadaan nyt

$$\begin{aligned} |K_n * f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x-u) - f(x))\ K_n(u)\,\mathrm{d}u \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-u) - f(x)|\ K_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{\int_0^{\delta} \cdots + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \cdots}_{=I_1} + \underbrace{\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \cdots}_{=I_2} \end{aligned}$$

Käsittelemme erikseen integroinnit yli edellä määrättyjen välien. Nyt Lemman 5.3 kohdan *i*) ja vakion δ määritelmän nojalla nojalla

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Koska f ja K_n ovat 2π-periodisia, niin tästä seuraa, että $|I_1| \le \varepsilon/2$. Vielä tulee käsitellä termi I_2. Nyt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad \le 2\Big(\sup_{[0,2\pi]} |f(x)| \Big) \sup_{[-\delta, 2\pi-\delta]} K_n(x) \le 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Siispä jokaisella $x \in [0, 2\pi]$ on voimassa $|K_n * f(x) - f(x)| \le I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, joten väite seuraa. □

Huomautus. Lemmojen 5.2 ja 5.3 sekä integraalin lineaarisuuden nojalla

$$K_n * f(x) = \Big(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k \Big) * f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k * f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f; x)$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lause 5.4 tunnetaan *Fejérin lauseen* nimellä. Lauseen 5.4 perusteella jatkuvan 2π-periodisen funktion f Fourier-osasummien *aritmeettinen keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f:ää välillä $[0, 2\pi]$ ja siten myös *pisteittäin* kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

Seurauksena tästä saadaan tärkeä yksikäsitteisyysominaisuus.

5.5. **Seuraus.** *Jos $f \in C\,(0, 2\pi)$ on 2π-periodinen ja $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $f \equiv 0$.*

Todistus. Jos $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $s_n(f; x) = \sum \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla $f(x) = \lim K_n * f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. □

Siis jatkuvien funktioiden tapauksessa Fourier-kertoimet määräävät funktion eli jos f ja g ovat jatkuvia ja 2π-periodisia, niin $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f = g$.

Todistamme seuraavaksi keskeisen approksimaatiotuloksen L^p-funktioille.[5] Tämä tulos kertoo sen, että sileät funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^p[0, 2\pi]$, kun $p \neq \infty$.

5.6. **Lause.** *Olkoon $f \in L^p[0, 2\pi]$, kun $1 \leq p < \infty$, ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa 2π-periodinen C^∞-funktio g, jolle*

$$\text{(A)} \qquad \| f - g \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Todistus. Havaitaan, että $K_n * g$ on C^∞-funktio, sillä se on Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla äärellinen summa trigonometrisistä funktioista, jotka ovat C^∞-funktioita.

Lauseen 5.4 nojalla riittää siis löytää *jatkuva* funktio g, jolle (A) on voimassa, sillä

$$\| f - K_n * g \|_p \leq \| f - g \|_p + \| g - K_n * g \|_p,$$

missä

$$\| g - K_n * g \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |g(x) - K_n * g(x)| \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \| g - K_n * g \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Etsitään haluttu jatkuva funktio g ”asteittain”:

1.) Olkoon $f = \chi_F$ *suljetun* joukon $F \subset [0,2\pi]$ karakteristinen funktio. Asetetaan

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + n \operatorname{dist}(x, F)}, \qquad \text{kun } x \in [0, 2\pi] \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Etäisyysfunktio $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$ on jatkuva (tarkista!), joten $g_n \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $g_n(x) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jos $x \in F$ ja $g_n(x) \to 0$, kun $x \notin F$ ja $n \to \infty$, sillä tällöin $\operatorname{dist}(x, F)) > 0$. Siis $g_n \to \chi_F$ pisteittäin, kun $n \to \infty$. Koska $0 \leq g_n(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \| g_n - \chi_F \|_p^p &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \, \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Lisäksi muuttamalla funktiota g_n pienessä välissä $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ voi olettaa että $g_n(0) = g_n(2\pi)$.

[5] Vertaa Reaalianalyysi I

tähän tulee kuva!!

2.) Olkoon $f = \chi_A$ avoimen joukon $A \subset [0, 2\pi]$ karakteristinen funktio. Tämä seuraa kohdasta 1.), koska komplementti $A^c = [0, 2\pi] \setminus A$ on suljettu ja $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$.

3.) Olkoon $f = \chi_A$, kun $A \subset [0, 2\pi]$ Lebesgue-mitallinen joukko. Tällöin Lebesguen mitan määritelmä nojalla löytyy sellainen jono avoimia joukkoja $G_n \subset [0, 2\pi]$, että

$$G_n \supset A \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(G_n \setminus A) = 0,$$

kun μ on Lebesguen mitta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $\mu(G_n \setminus A) < (\varepsilon/2)^p$. Edelleen kohdan 2.) nojalla löytyy sellainen jatkuva 2π-periodinen funktio g, jolle $\| g - \chi_{G_n} \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Siispä

$$\| g - \chi_A \|_p \leq \| g - \chi_{G_n} \|_p + \| \chi_{G_n} - \chi_A \|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(G_n \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4.) Olkoon $f \in L^p(0, 2\pi)$ mielivaltainen. Tällöin Lebesguen integraalin määritelmä nojalla löytyy sellainen yksinkertainen funktio

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

että $\| f - g \|_p < \varepsilon$. Soveltamalla kohtaa 3.) kuhunkin karakteristiseen funktioon χ_{A_j} löydetään sellainen jatkuvat 2π-periodiset funktiot g_j, että

$$\| \chi_{A_j} - g_j \|_p < \frac{\varepsilon}{nM},$$

missä $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. Siispä kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \Big\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j \Big\|_p &\leq \| f - g \|_p + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \| g_j - \chi_{A_j} \|_p \\ &< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \frac{\varepsilon}{nM} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\sum a_j g_j$ on myös 2π-periodinen jatkuva funktio, väite seuraa.

$\square$

5.7. *Huomautus.*

1) Lauseen 5.6 nojalla sileiden C^∞-funktioiden muodostama aliavaruus on tiheä myös avaruudessa $L^p(a,b)$, kun $a < b$ ja $1 \le p < \infty$, mikä seuraa lineaarisesta "muuttujanvaihdosta" $[a,b] \to [0,2\pi]$.

2) Lause 5.6 *ei päde* tapauksessa $p = \infty$ (HT).

3) Jos $f \in L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa sellainen $M > \infty$, että
$$\int_{J_M} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$
kun $J_M = \{|x| > M\}$. Siispä vektorialiavaruus $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$.

4) Jos $\Omega \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, $\mu(\Omega) > 0$ ja $f \in L^p(\Omega)$, niin asetetaan $\widetilde{f} = f \cdot \chi_\Omega$ eli
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases}$$
jolloin $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Tämän avulla voidaan päätellä, että $C^\infty|_\Omega$ on tiheä avaruudessa $L^p(\Omega)$, kun $1 \le p < \infty$.

5) Voidaan myös osoittaa, että p-integroituvat $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funktiot muodostavat tiheän aliavaruuden avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$, katso Reaalianalyysi I, luku 2.4. (n-ulotteinen tapaus on vähän hankalampi, koska käytimme edellä Fejérin ytimien $K_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k$ erikoisominaisuuksia).

Saadaan yksikäsitteisyys myös L^2-funktioiden Fourier-sarjoille:

5.8. **Seuraus.** *Jos $f \in L^2(0,2\pi)$ ja*
$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \textit{kaikilla } k \in \mathbb{Z},$$
niin $f = \bar{0}$. Erityisesti, jos
$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [0,2\pi], n \in \mathbb{Z},$$
niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta avaruudessa L^2.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Lauseen 5.6 nojalla on olemassa sellainen *jatkuva* $g \in C(0,2\pi)$, että g on 2π-periodinen ja $\| f - g \|_2 < \varepsilon$.

Lauseen 5.4 sivulla 76 mukaan konvoluutio $K_n * g \to g$ *tasaisesti* välillä $[0,2\pi]$, kun $n \to \infty$, joten
$$\| g - K_n * g \|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| g - K_n * g \|_\infty < \varepsilon$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$. Sivun 77 huomautuksen nojalla

$$K_n * g = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \qquad \text{(trigonometrinen polynomi)},$$

missä $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Koska $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali jono, niin Huomautuksen 4.35 sivulla 66 nojalla

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 \le \Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2 .$$

Tästä kolmioepäyhtälön ja edellisten arvioiden nojalla seuraa, että

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 \le \|\, f - g \,\|_2 + \Big\| g - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2 < 2\varepsilon.$$

Oletuksen nojalla $(\, f \,|\, e_k \,) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, joten $\|\, f \,\|_2 < 2\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $f = \bar{0}$.

Lauseen 4.39 sivulla 67 ehdon b) nojalla jono $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. □

Yhteenveto (Fourier-sarjojen L^2-teoriasta)

Kokoamme lyhyesti saamamme tulokset Fourier-sarjojen L^2-teoriasta.

1.) Jos $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali jono avaruudessa L^2.

2.) Jos $f \in L^2$ ja $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\, f \,|\, e_n \,) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin $f = \bar{0}$. (Seuraus 5.8)

3.) Jos $f \in L^2$, niin

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\, f \,|\, e_n \,)\, e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

missä sarja suppenee L^2-*mielessä*. Konkreettisesti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Big| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \Big|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

(Lause 4.39 sivulla 67 ja Seuraus 5.8)

4.) Parsevalin identiteetin eli Lauseen 4.39 sivulla 67 kohdan e) nojalla

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2, \quad \text{kun } f \in L^2,$$

koska $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\, f \,|\, e_n \,)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

5.) Kääntäen, jos $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, niin tällöin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = \lambda_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z}.$$

Tämä on Riesz–Fischerin lause eli Seuraus 4.37 sivulla 67.

Pisteittäisen suppenemisen teoriasta esitämme seuraavan sovelluksen, joka toimii esimerkiksi jatkuvasti derivoituville funktioille.

5.9. **Lause.** *Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on 2π-periodinen ja toteuttaa Lipschitz-ehdon $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \to f(x),$$

kun $n \to \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Jos $h \in L^2$, niin Besselin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\big(\,(\,h \,|\, e^{in\cdot}\,) + (\,h \,|\, e^{-in\cdot}\,)\big)\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,(\,(\,h \,|\, e_n\,) + (\,h \,|\, e_{-n}\,)) \to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Samoin

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} h(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Valitaan nyt

$$h_x(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)}. \tag{*}$$

Tällöin Lipschitz-ehdon nojalla funktio $h_x \in L^\infty[0, 2\pi] \subset L^2[0, 2\pi]$. Lemman 5.2 nojalla

$$\begin{aligned}S_n(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\,(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Toinen identiteeteistä seuraa Lauseen 5.4 sivulla 76 todistuksessa olevasta konvoluutiokaavasta ja viimeinen siitä, että Lemman 5.3 sivulla 74 nojalla Dirichletin ytimen intgraali $\frac{1}{2\pi}\int D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Koska

$$D_n(t) = \frac{\sin\big((n + \frac{1}{2})t\big)}{\sin(t/2)} = \cos(nt) + \frac{\sin(nt)\cos(t/2)}{\sin(t/2)},$$

niin soveltamalla edellisiä identiteettejä yhteen saadaan

$$
\begin{aligned}
S_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_x(t)\cos(t/2)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Koska kiinteällä $x \in \mathbb{R}$ sekä $f(x-\cdot) - f(x) \in L^2$ että $h_x(t)\cos(t/2) \in L^2$, niin todistuksen alkuosan kahden raja-arvokaavan perusteella

$$
\lim_{n\to\infty} |S_n(f;x) - f(x)| = 0.
$$

□

Sobolev-avaruudet

Olkoon $f \in C^1(0, 2\pi)$ jatkuvasti derivoituva, $f(0) = f(2\pi)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\widehat{f'}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \Big/_{0}^{2\pi} f(t)e^{-ikt} \\
&\quad + \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = ik\widehat{f}(k),
\end{aligned}
$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Joten Parsevalin identiteetin (Lause 4.39 sivulla 67) nojalla

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2. \tag{5.10}
$$

Riesz–Fischerin lause (Seuraus 4.37 sivulla 67) vihjaa, että kaava (5.10) voisi olla voimassa yleisemmille funktioille f ja että on olemassa avaruuden L^2 vastine derivoituville funktioille; siis avaruus, joka koostuu funktioista $f \in L^2$, joille $f' \in L^2$.

Ongelma. Mikä on "derivaatta" f', jos $f \in L^2$?

Tarkastellaan aluksi *testifunktioiden avaruutta* $\mathscr{D}(\Omega)$, missä $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ on avoin väli (voi olla $\Omega = \mathbb{R}$). Palautetataan mieleen, että jos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$
\operatorname{supp}(\psi) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}}
$$

on ψ:n *kantaja.* Asetetaan nyt

$$
\mathscr{D}(\Omega) = \{\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ \operatorname{supp}(\psi) \subset \Omega \text{ on kompakti}\ \}.
$$

Huomautus. Jos $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin sen derivaatat $\psi^{(k)} \in \mathscr{D}(\Omega)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Olkoon $f \in C^1(\Omega)$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin osittaisintegroinmalla saadaan

$$\int_\Omega f'\varphi\,dx = -\int_\Omega f\varphi'\,dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{5.11}$$

Edellisessä identiteetissä ei ole sijoitustermiä, sillä testifunktio φ on häviää joukon Ω reunalla.

Identiteetin (5.11) avulla voimme samaistaa derivaatan f' ja sitä vastaavan *lineaarikuvauksen*

$$L_{f'} : \varphi \mapsto -\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

missä $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ja $f \in C^1(\Omega)$. Seuraavksi näytämme, että samaistus on järkevä (eli jos tunnemme lineaarikuvauksen $L_{f'}$, niin voimme selvittää funktion f' yksikäsitteisesti 0-mittaista joukkoa vaille).

5.12. **Lemma.** *Olkoon $f \in C^1(\Omega)$ ja Ω rajoitettu avoin väli. Jos $g \in L^2(\Omega)$ ja*

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x \quad \textit{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

niin $f'(x) = g(x)$ m.k. $x \in \Omega$.

Todistus. Oletuksen ja identiteetin (5.11) nojalla

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f'\varphi\,\mathrm{d}x,$$

eli

$$\int_\Omega (f'-g)\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Siis $(f'-g) \perp \mathscr{D}(\Omega)$ avaruudessa $L^2(\Omega)$.

Riittää siis näyttää, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, sillä tällöin testifunktioiden ortokomplementti $\mathscr{D}(\Omega)^\perp = \bar{0}$, joten $f' = g$ avaruuden $L^2(\Omega)$ alkioina.

Olkoon $\Omega = (0,1)$ (yleinen tapaus $\Omega = (a,b)$ voidaan palauttaa tähän lineaarisella muunnoksella). Etsimme kiinteällä $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ funktion $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, jolle pätee

1. kun $x \in \Omega$, niin $0 \le \eta_\varepsilon(x) \le 1$,
2. nollan ja ykkösen ympäristöissä funktio η_ε on identtisesti nolla, eli $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$, kun $0 < x < \varepsilon$ tai $1-\varepsilon < x < 1$,
3. funktio $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$, kun $2\varepsilon < x < 1-2\varepsilon$

Tämän etsiminen jää harjoitustehtäväksi. Voit käytää apuna tietoa, että

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

on C^∞-funktio, vrt. Reaalianalyysi I.

Jos $f_0 \in C^\infty(\Omega)$, niin $\eta_\varepsilon f_0 \in \mathscr{D}(\Omega)$ ja Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla

$$\| f_0 - \eta_\varepsilon f_0 \|_2 = \int_0^1 |1 - \eta_\varepsilon(x)|^2 |f_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0^+$. Koska Lauseen 5.6 sivulla 78 nojalla tiedetään, että $\overline{C^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$, niin edellisen nojalla myös $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$. $\square$

Huomautus. Lemman 5.12 todistus toimii sellaisenaan vain, jos $f' \in L^2(\Omega)$. Tämä "lisärajoitus" voidaan helposti kiertää, sillä jos $\Omega_j \subseteq \Omega$ on kompakti, niin soveltamalla todistusta derivaatan f' rajoittumaan kompaktiin joukkoon Ω_j nähdään, että $f' = g$ m.k $x \in \Omega_j$. Siirtyminen kompakteihin joukkoihin takaa, että jatkuva funktio on neliöintegroituva. Valitsemalla jono kompakteja osajoukkoja $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$ siten, että $\Omega = \bigcup \Omega_j$, niin edellisestä seuraa, että $f' = g$ m.k. $x \in \Omega$.

5.13. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a, b)$ avoin väli ja $f \in L^2(\Omega)$. Funktio $g \in L^2(\Omega)$ on f:n *distribuutioderivaatta* (eli *heikko* tai *yleistetty* derivaatta), jos

$$L_g(\varphi) := \int_\Omega g\,\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi' \,\mathrm{d}x = -L_f(\varphi') \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

5.14. *Huomautus.* Jos distribuutioderivaatta g on olemassa, niin g on yksikäsitteinen L^2-funktiona. Tämä seuraa soveltamalla Lemman 5.12 todistusta. Jos $f \in C^1(\Omega)$, niin identiteetin (5.11) nojalla $g = f'$ tavallisessa mielessä. Jos f:lla on distribuutioderivaatta, niin merkitään $g = f'$.

5.15. *Huomautus.* Yllä olevien heikkojen derivaattojen tarkastelu johtaa *distribuutioihin* (eli yleistettyihin funktioihin). Näihin joudutaan esimerkiksi seuraavista vaatimuksista:

(a) jokainen jatkuva funktio on distribuutio,
(b) distribuutioilla on *kaikkien* kertalukujen derivaatat, jotka ovat edelleen distribuutioita. Jos $f \in C^1$, niin distribuutioderivaatta = tavallinen derivaatta.
(c) derivaatan tavallisten laskusääntöjen tulee olla voimassa (distribuutioiden *tulo* on ongelma!).
(d) distribuutioilla tulee olla riittävän hyviä konvergenssin ominaisuuksia (rajaprosesseja varten).

Määritellään *distribuutio* lineaarikuvauksena $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. Jokainen jatkuva $f \in C(\Omega)$ määrää lineaarikuvauksen $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f(\varphi)\,\mathrm{d}x$. Jos asetamme identiteetin (5.11) sivulla 84 motivoimana, että

$$\Lambda'(\varphi) = -\Lambda(\varphi'), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

niin ehdot (b) ja (c) tulevat täytetyiksi. Kohtaa (d) varten testifunktioiden joukko $\mathscr{D}(\Omega)$ pitää varustaa sopivalla topologialla, jolloin distribuutiot ovat tarkalleen *jatkuvat* lineaarikuvaukset $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. Tämän topologian määrittely sekä karakterisointi vaatii lisätarkasteluja, joten se sivuutetaan tällä kurssilla.[6]

5.16. **Esimerkki.** Olkoon $\Omega = (-1, 1)$ ja

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\textit{Heavisiden}\ \text{funktio}).$$

Tällöin $H \in L^2(\Omega)$, mutta kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ pätee

$$-\int_{-1}^{1} \varphi'(x)H(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) - \underbrace{\varphi(1)}_{=0} = \varphi(0)$$

eikä voi olla olemassa funktiota $g \in L^2(\Omega)$, jolle

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

5.17. *Huomautus.* Heavisiden funktion H derivaatta "distribuutiona" on ns. *Diracin deltafunktionaali* δ, jolle $\delta(x) = 0$ kun $x \neq 0$ ja $\int_\Omega \delta(x)\,dx = 1$. Siis δ ei voi olla tavallinen funktio, vaan se on *aito distribuutio*.

5.18. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a, b)$ avoin väli. *Sobolev-avaruus* $H^1 = H^1(\Omega)$ koostuu niistä avaruuden L^2 funktioista f, joilla on distribuutioderivaatta $f' \in L^2$ eli

$$H^1 = \{\, f \in L^2(\Omega) : \text{ funktiolla } f \text{ on distribuutioderivaatta } f' \in L^2(\Omega) \,\}.$$

Huomautus. Merkintä H^1 viittaa derivaatan kertalukuun ja H Hilbertin avaruuteen. Usein merkitään myös $H^1 = W_2^1 = W^{1,2}$.

5.19. **Lause.** *H^1 on Hilbert-avaruus varustettuna sisätulolla*

$$(\, f \,|\, h\,) = \int_\Omega f(x)\overline{h(x)} + f'(x)\overline{h'(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in H^1.$$

Todistus. HT 8/2006. □

Tarvitsemme myöhemmissä esimerkeissä Sobolev-funktioiden perusominaisuuksia ja näitä varten tarvitaan seuraava versio analyysin peruslauseesta heikoille derivaatoille.

[6]katso esimerkiksi Walter Rudin: "Functional Analysis".

5.20. **Lemma.** *Jos* $f \in L^2(\Omega)$ *ja* $\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = 0$ *kaikilla* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$*, niin* $f(x) \equiv C$ *(vakio) m.k.* $x \in \Omega$ *eli joukko* $\{\, x \in \Omega :\ f(x) \neq C \,\}$ *on 0-mittainen.*

Todistus. Olkoon $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ funktio, jolle $\int_\Omega \psi\, dx = 1$. Jos $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen, niin asetetaan

$$\varphi(x) = \int_a^x \left(w(t) - \Big(\int_\Omega w(y)\,\mathrm{d}y \Big) \psi(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Tämän havaitsemiseksi lasketaan ensin φ derivaatta, joka on $\varphi'(t) = w(t) - (\int w\,\mathrm{d}x)\psi(t)$. Olkoon nyt väli $[c,d] \subset \Omega = (a,b)$ sellainen, että $\mathrm{supp}(\psi) \cup \mathrm{supp}(w) \subset [c,d]$, niin kaikilla $c' \in [a,c]$ on $\varphi(c') = 0$ ja edelleen

$$\begin{aligned}\varphi(d') = \varphi(d') - \varphi(c') = \int_{c'}^{d'} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{c'}^{d'} \left(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega w(t)\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \psi(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

kaikilla $d' \in [d,b]$, sillä $\int \psi\,\mathrm{d}x = 1$. Siispä $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega$ ja on kompakti.

Oletuksen ja Fubinin lauseen[7] nojalla on siis

$$\begin{aligned}0 = \int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(t) \left(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega w(x) \left(f(x) - \int_\Omega f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Koska $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen ja $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (Lauseen 5.12:n todistus), niin tästä seuraa, että

$$f(x) - \underbrace{\int_\Omega f\,\psi\,\mathrm{d}t}_{=C=\text{vakio}} = 0 \qquad \text{m.k.} \quad x \in \Omega$$

□

Analyysin peruslauseen (Lemma 5.20) avulla voimme osoittaa, että Sobolev-funktiot ovatkin hieman sileitä myös tavallisessa mielessä. Tarkemmin sanoen seuraava tulos on voimassa.

5.21. **Lause.** *Jos* $\Omega = (a,b)$ *on rajoitettu väli,* $f \in H^1(a,b)$ *ja* f' *on sen distribuutioderivaatta, niin*

a) f *on jatkuva (tarkemmin: on olemassa* $\widetilde{f} \in C(a,b)$*, jolle* $\widetilde{f}(x) = f(x)$ *m.k.* $x \in \Omega$ *eli funktion* f *määräämä* L^2*-luokka sisältää jatkuvan* edustajan*)*

[7] integroimisjärjestyksen vaihto, kts. Mitta ja integraali

b)

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t + f(x_0) \qquad m.k. \quad x, x_0 \in (a,b)$$

Huomautus.

(1) Ominaisuus ”on olemassa jatkuva edustaja” on vahvempi kuin ominaisuus ”m.k. jatkuva”. Esimerkiksi välin $[0,1]$ karakteristinen funktio $\chi_{[0,1]}$ on jatkuva m.k. $x \in \mathbb{R}$, mutta ei ole olemassa sitä vastaavaa jatkuvaa edustajaa.

(2) Jos f on *jatkuva* funktio, jolle löytyy $f'(x)$ m.k. x (tavallisessa mielessä) ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin tällöin b) *ei* aina päde (Reaalianalyysi I: on olemassa jatkuva ns. *Cantorin funktio* $f : [0,1] \to [0,1]$, jolle $f'(x) = 0$ m.k. $x \in [0,1]$, $f(0) = 0, f(1) = 1$).

Lauseen 5.21 todistus. Voidaan vapaasti olettaa, että $(a,b) = (0,1)$. Olkoon $x_0 \in (0,1)$. Määritellään funktio

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

joka on hyvin määritelty, sillä $f' \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ Schwarzin tai Hölderin epäyhtälön nojalla. Jos $x, y \in (0,1)$, niin Hölderin nojalla (jos $x < y$)

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f'(t)dt - \int_{x_0}^{y} f'(t)dt \right| = \left| \int_{x}^{y} f'(t)dt \right| \\
&\le \left(\int_{x}^{y} |f'(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{x}^{y} 1dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|y-x|^{\frac{1}{2}}} \le \| f \|_{H^1} |x-y|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

eli h on tasaisesti jatkuva $(0,1) \to \mathbb{K}$ ja siten myös jatkuva välillä $[0,1]$. *Väite:* $f(x) - h(x) = C$ (vakio) m.k. $x \in (0,1)$ (*Huom*: (a) ja (b) seuraavat tästä heti). Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ mielivaltainen ja olkoon $x_0 = 0$ (merkintöjen helpottamiseksi). Tällöin Fubinin lauseen, distribuutioderivaatan määritelmän sekä tiedon, että $\varphi(1) = 0$, saadaan

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi'(x) h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varphi'(x) \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 f'(t) \underbrace{\left(\int_t^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right)}_{=\varphi(1)-\varphi(t)=-\varphi(t)} \mathrm{d}t = -\int_0^1 f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

joten

$$\int_0^1 \varphi'(t)(h(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Siispä Lemman 5.20 nojalla $f(x) - h(x) \equiv C$ m.k. $x \in (0,1)$. $\square$

Seuraavassa oletetaan aina, että Sobolev-funktio $f \in H^1(a,b)$ on jatkuva (siis edustajana Lauseen 5.21 kohdan a) mielessä) ja erityisesti

$$f(a) = \lim_{x\to a+} f(x) \quad \text{ja} \quad f(b) = \lim_{x\to b-} f(x)$$

ovat olemassa (katso Lauseen 5.21 todistus). Siis tässä mielessä

$$H^1(a,b) \subset C(a,b)\,(= \{\, f\colon [a,b] \to \mathbb{K} :\ f \text{ on jatkuva} \,\}).$$

Kirjoitetaan näkyviin pari seurausta Lauseelle 5.21.

5.22. **Seuraus.** *Jos $f \in H^1(a,b)$ ja $f' \in C(a,b)$, niin $f \in C^1(a,b)$.*

Todistus. Lauseen 5.21 ja derivaatan f' jatkuvuuden nojalla

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

kaikilla $x_0, x \in [a,b]$. $\square$

5.23. **Seuraus.** *Joukko $H^1_0(a,b) = \{\, f \in H^1(a,b) :\ f(a) = f(b) = 0 \,\}$ on avaruuden $H^1(a,b)$* suljettu *aliavaruus (ja siis Hilbert avaruus).*

Todistus. HT 9/2006 $\square$

Huomautus. Koska avaruuden H^1 funktiot ovat jatkuvia, niin 2π-periodisessa tapauksessa $H^1(0,2\pi)$ voidaan karakterisoida Fourier-kertoimien avulla: eli funktio $f \in H^1(0,2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$ jos ja vain jos

$$f \in L^2(0,2\pi) \quad \text{ja} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Tämä seuraa sivulla 83 olevasta johdantotekstistä Sobolev-avaruuksiin, kun lisäksi yhdistämme tähän päättelyyn HT 9/2006 tehtävässä 2 osoitettua tulosta.

Sovelluksista differentiaaliyhtälöihin

Hilbertin avaruus-metodeja voidaan käyttää apuna myös differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Tarkastellaan esimerkkinä *Sturmin–Liouvillen* yhtälöitä: Oletetaan, että on annettu funktiot $p \in C^2(0,1)$, $q \in C(0,1)$ ja etsitään funktiota $u \in C^2(0,1)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot

$$\text{(SL)} \qquad \begin{cases} -(p(x)u'(x))'(x) + q(x)u(x) = 0, & \text{kun } x \in (0,1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

Teemme seuraavat *lisäoletukset*: on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$p(x) \geq \delta \quad \text{ja} \quad q(x) \geq \delta \quad \text{aina, kun } x \in [0,1] \tag{5.24}$$

Seuraava tärkeä *heikkon ratkaisun* käsite kytkee yhteen differentiaaliyhtälöt ja Hilbertin avaruudet.

5.25. **Määritelmä.** Funktio $u \in H^1(0,1)$ on yhtälön (SL) *heikko ratkaisu*, jos $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ sekä

$$\int_0^1 p(x)\varphi'(x)u'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)\varphi(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

kaikilla testifunktiolla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$.

Toisin sanoen, funktio u on Sturmin–Liouvillen yhtälön (SL) heikko ratkaisu, jos funktion pu' distribuutioderivaatta on qu. Todistamme nyt Hilbertin avaruusmenetelmillä seuraavan tuloksen, jonka tarkennuksiin palaamme myöhemmin kurssilla, kunhan olemme saaneet uusia ja tehokkaampia työkaluja.

5.26. **Lause.** *Kun p ja q ovat alhaalta rajoitettuja (eli kun ehto* (5.24) *toteutuu), niin yhtälöllä* (SL) *on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in C^2(0,1)$.*

Todistus. Todistamme väitteen useissa pienissä askeleissa.
1. askel: Ensimmäisenä askeleen osoitetaan, että

Väite. *Jos $u \in C^2$ on yhtälön* (SL) *klassinen ratkaisu*[8]*, niin u on myös heikko ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 (p\,\varphi'\,u' + q\,u\varphi)(x)\,\mathrm{d}x &= \Big/_{\!0}^{1} p(x)\varphi(x)u'(x) \\ &\quad + \int_0^1 \varphi(x)\underbrace{\big(-(p\,u')' + q\,u\big)(x)}_{\equiv 0}\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Sijoitustermi häviää, sillä $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Siis u on Määritelmän 5.25 nojalla myös heikko ratkaisu. □

2. askel: Asetetaan avaruuteen $H^1(0,1)$ uusi sisätulo

$$\langle\, u \,|\, v \,\rangle = \int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Selvästi $\langle\, u \,|\, v \,\rangle$ on funktion u suhteen lineaarinen, $\langle\, u \,|\, v \,\rangle = \overline{\langle\, v \,|\, u \,\rangle}$ ja lisäksi $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ on aidosti positiviinen, sillä $p \geq \delta \geq 0$ ja $q \geq \delta \geq 0$. Siispä $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ on todella sisätulo avaruudessa $H^1(0,1)$.

[8] siis $u \in C^2$ ja toteuttaa reuna-arvotehtävän (SL)

Väite. *Joukko* $H^1(0,1)$ *varustettuna sisätulolla* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *on Hilbertin avaruus.*

Todistus. On siis vielä näytettävä, että $H^1(0,1)$ on täydellinen normissa

$$|||\, u \,||| := \sqrt{\langle\, u \mid u \,\rangle}.$$

Olemme olettaneet, että $\delta \le p, q$ ja koska p sekä q ovat jatkuvina funktioina rajoitettuja välillä $[0,1]$, niin jollakin vakiolla $M > 0$ on

$$0 < \delta \le p(x) \le M < \infty, \quad 0 < \delta \le q(x) \le M < \infty.$$

Nyt

$$\begin{aligned} |||\, u - v \,|||^2 &= \int_0^1 p(x)|u'(x) - v'(x)|^2 + q(x)|u(x) - v(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\le M \int_0^1 |u'(x) - v'(x)|^2 + |u(x) - v(x)|^2 \,\mathrm{d}x = M\|\, u - v \,\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Samoin nähdään, että $\delta\|\, u - v \,\|_{H^1}^2 \le |||\, u - v \,|||^2$. Siis, jos (u_n) on Cauchyn jono avaruudessa $(H^1, |||\cdot|||)$, niin se on Cauchyn jono myös avaruudessa $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$. Koska $(H^1, \|\cdot\|_{H^1})$ on täydellinen (Lause 5.19 sivulla 86), niin löytyy sellainen $u \in H^1$, että $\|\, u_n - u \,\|_{H^1} \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin $|||\, u_n - u \,||| \le M\|\, u_n - u \,\|_{H^1} \to 0$, ja siis myös avaruus $(H^1, |||\cdot|||)$ on täydellinen. □

3. askel: Seuraava askel on näyttää, kuinka yhtälölle (SL) löydetään heikko ratkaisu.

Väite. *Yhtälöllä* (SL) *on heikko ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $E = (H^1, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, missä sisätulo $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ on sama kuin askeleessa 2. Nyt toisen askeleen mukaan avaruus E on Hilbertin avaruus. Valitaan nyt jokin $f \in E$, jolle $f(0) = \alpha$ ja $f(1) = \beta$, esimerkiksi funktio $f(x) = \alpha + x(\beta - \alpha)$ kelpaa. Seurauksen 5.23 sivulla 89 nojalla H_0^1 on avaruuden H^1 suljettu aliavaruus ja edelliseen askeleen todistuksen nojalla H_0^1 on myös avaruuden E suljettu aliavaruus. Siispä voimme soveltaa luvun 4 normin minimoijatuloksia ja siten Seurauksen 4.18 sivulla 60 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $g \in H_0^1$, jolle

$$|||\, f - g \,||| = \inf\{\ |||\, f - h \,||| :\ h \in H_0^1 \ \}.$$

Edelleen Lauseen 4.20 sivulla 61 nojalla $(f - g) \perp H_0^1$ sisätulon $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ suhteen. Jos nyt merkitään $u = f - g$, niin

$$u(0) = f(0) - g(0) = \alpha - 0 = \alpha \quad \text{ja} \quad u(1) = f(1) - g(1) = \beta.$$

Koska selvästi $\mathscr{D}(0,1) \subset H_0^1(0,1)$, niin jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ on

$$0 = \langle\, f - g \,|\, \overline{\varphi}\, \rangle = \int_0^1 p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

eli funktio u on yhtälön (SL) heikko ratkaisu! □

Huomautus. Edellä esitetty heikon ratkaisun konstruointi voidaan tulkita myös *Dirichlét'n periaatteena*:

> ”Jos
> $$I(u) = \int_0^1 p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$
> niin yhtälön (SL) heikko ratkaisu on funktio $u_0 \in H^1(0,1)$, joka toteuttaa reunaehdot $u_0(0) = \alpha$, $u_0(1) = \beta$ ja jolle pätee
> $$I(u_0) = \inf\{\, I(u) :\ u(0) = \alpha \text{ ja } u(1) = \beta \,\}.\text{”}$$

4. askel: Tässä askeleessa osoitamme, että yhtälöllä (SL) on korkeintaan yksi ratkaisu. Yhdessä edellisen askeleen kanssa tämä takaa sen, että yhtälöllä on tarkalleen yksi heikko ratkaisu. Tätä varten tarvitsemme seuraavan lemman, joka osoittaa, että testifunktiot ovat tiheässä avaruudessa H_0^1 (mutta eivät siis koko Sobolev-avaruudessa H^1 !!).

5.27. **Lemma.** *Testifunktioiden sulkeuma $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, kun Ω on rajoitettu väli ja sulkeuma otetaan H^1-normin suhteen.*

Todistus. Oletetaan seuraavassa laskujen yksinkertaistamiseksi, että $\Omega = (0,1)$. Ensiksi, sillä $\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ja avaruus $H_0^1(\Omega)$ on suljettu, niin $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} \subset H_0^1(\Omega)$.

Kääntäen, jos $f \in H_0^1(\Omega)$, niin Lauseen 5.21 sivulla 87 nojalla

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Edelleen Lemman 5.12 sivulla 84 todistuksessa osoitettiin, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$, joten löytyy sellainen $g \in \mathscr{D}(\Omega)$, jolle $\|\, f' - g \,\|_2 < \varepsilon$. Koska väli $[0,1]$ on rajoitettu, niin tiedämme, että $\|\, f' - g \,\|_1 \le \|\, f' - g \,\|_2 < \varepsilon$. Siten

$$(*) \qquad \Big|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\Big| = \Big|\int_0^1 g(x) - f'(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \|\, g - f' \,\|_1 < \varepsilon.$$

Ensimmäinen identiteetti seuraa siitä, että

$$0 = f(1) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Väitteen osoittamiseksi haluaisimme nyt konstruoida funktion $h \in \mathscr{D}(0,1)$, jolle sekä $\|\, f - h \,\|_2$ ja $\|\, f' - h' \,\|_2$ olisivat pieniä. Hyvä kandidaatti vaikuttaisi olevan funktion g integraalifunktio

$$h(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

Onko tämä integraalifunktio h kuitenkaan $\mathscr{D}(0,1)$:ssä? Jotta se olisi, on oltava $h(1) = 0$, mikä tarkoittaa, että vakio

$$\beta := \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

mutta me tiedämme vain arvion $(*)$. Korjataksemme tämän puutteen, valitsemme jonkin *kiinteän* testifunktion $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$, joka toteuttaa ehdot $\varphi \geq 0$, $\| \varphi \|_1 = 1$. Olkoon nyt funktio $\widetilde{g} := g - \beta\varphi$. Nyt $\widetilde{g} \in \mathscr{D}(0,1)$, sen integraali on nolla ja lisäksi arvion $(*)$ nojalla

$$\| g - \widetilde{g} \|_2 = |\beta| \, \| \varphi \|_2 < \varepsilon \| \varphi \|_2.$$

Voimme nyt vaihtaa funktion g funktioksi $\widetilde{g}$, joten voimme siis olettaa, että kaavan $(**)$ määräämä integraalifunktio $h \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt loppuosoitus on suoraviivainen, sillä

$$\begin{aligned}
\| f - h \|_{H^1}^2 &= \int_0^1 |f(x) - h(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - h'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big| \int_0^x f'(t) - \widetilde{g}(t)\,\mathrm{d}t \Big|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - \widetilde{g}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \Big(\int_0^x |f'(t) - \widetilde{g}(t)|\,\mathrm{d}t \Big)^2 \mathrm{d}x + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \\
&\leq \int_0^1 |f'(t) - \widetilde{g}(t)|^2\,\mathrm{d}t + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \leq 2(1 + \| \varphi \|_2)^2 \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen arvio seuraa Cauchy–Schwarzin (tai Hölderin) epäyhtälön nojalla. Siispä $H_0^1(\Omega) \subset \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$. □

Edeltävän lemman avulla voimme nyt osoittaa askeleen 4. väitteen:

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu on yksikäsitteinen.*

Todistus. Osoitimme 3. askeleessa, että jos $g \in H_0^1$ on se *yksikäsitteinen* alkio, jolle $f - g \perp H_0^1$, niin $u = f - g$ toteuttaa yhtälön (SL).

Kääntäen, jos u_1 toteuttaa yhtälön (SL), niin reunaehdon nojalla $u_1 = f - g_1$, missä $g_1 \in H_0^1(0,1)$. Heikon ratkaisun määritelmän nojalla $\langle u_1 \,|\, \varphi \rangle = 0$ jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ eli $f - g_1 \perp \mathscr{D}(0,1)$. Mutta Lemman 5.27 mukaan $\overline{\mathscr{D}(0,1)} = H_0^1$, joten $f - g_1 \perp H_0^1$. Siispä Lauseen 4.20 sivulla 61 nojalla $\| f - g_1 \| = \operatorname{dist}(f, H_0^1)$, joten Lauseen 4.17 sivulla 59 nojalla $u_1 = f - g_1 = f - g = u$, joten ratkaisu on yksikäsitteinen. □

5. askel: Viimeisenä askeleena osoitamme, että edellisissä askeleissa konstruoitu yksikäsitteinen heikko ratkaisu on lisäksi klassinen.

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu u on klassinen ratkaisu eli $u \in C^2[0,1]$.*

Todistus. Alkujaan tiedetään, että $u \in H^1$, joten $u' \in L^2(0,1)$. Koska $p \in C^2(0,1)$, niin tulo $pu' \in L^2(0,1)$. Koska tulon pu' distribuutioderivaatta on $qu \in L^2$, niin tiedämmekin siis, että $pu' \in H^1(0,1)$, joten Lauseen 5.21 nojalla funktio pu' on jatkuva. Edelleen, koska $p \geq \delta > 0$, niin $u' \in C(0,1)$, joten olemme johtaneet, että itse asiassa $u \in C^1(0,1)$.

Nyt $(pu')' = qu \in C(0,1)$ myös klassisessa mielessä, joten $pu' \in C^1(0,1)$, mistä seuraa edellleen, että $u \in C^2(0,1)$. □

Yhdessä kaikki askeleet osoittavat Lauseen 5.26 väitteen. □

Lisätietoja:

1. Sama koneisto voidaan rakentaa korkeammissakin dimensioissa ja L^p-avaruuksissa: kun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $1 \leq p < \infty$, voidaan myös määritellä Sobolev-avaruus

$$W_p^1(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : f\text{:n heikot osittaisderivaatat } \partial_1 f, \ldots, \partial_n f \in L^p(\Omega)\}.$$

Vastaavasti vaatimalla, että L^p-funktion f kaikkien korkeintaan astetta[9] k olevat heikot distribuutioderivaatat $\partial^\alpha f \in L^p$, voimme myös määritellä Sobolev-avaruudet $W_p^k(\Omega)$ sekä $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$. Tällöin voidaan osoittaa Lauseen 5.21 sivulla 87 vastine eli erikoistapaus *Sobolevin upotuslauseesta*:

> ”Jos $k > \frac{n}{2}$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on riittävän sileäreunainen, niin $H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.”

2. Edellä esitetty Sturmin–Liouvillen yhtälöiden ratkaisumenetelmää voidaan soveltaa korkeammissa dimensioissa ns. *elliptisiin yhtälöihin*, joiden prototyyppi on

$$\begin{cases} -\triangle u + u = 0, \\ u|\partial\Omega = f, \end{cases}$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue. Ratkaisumenetelmä toimii kuten edellä:

i) Klassinen ratkaisu on heikko ratkaisu
ii) On olemassa heikko ratkaisu
iii) Heikko ratkaisu on yksikäsitteinen (joten myös klassinen ratkaisu on yksikäsitteinen)
iv) Heikon ratkaisun u säännöllisyys, eli $u \in C^2$

[9] sanomme, että $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f$ on astetta k, jos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$

Tästä yhtälöstä päästään *Laplacen yhtälöön* $\triangle u = 0$ Fredholm-operaattoreiden tai Fredholmin teorian avulla. Siis tässä luovumme oletuksesta, että $q \geq \delta > 0$!!

3. Historiallisesti, Bernhard Riemann (1826–1866) ratkaisi yhtälön $\triangle u = f$ juuri edellä mainitun Diriclét'n periaatteen avulla. Karl Weierstraß (1815–1897) aiheutti suuren sensaation kriittisellä artikkelillaan "Über das Sogerannte Dirichletsche Princip", jossa hän esitti seuraavan vastaesimerkin: Jos

$$J(u) = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

niin ei ole jatkuvaa funktiota u_0, jolle $u_0(1) = 1$, $u_0(-1) = -1$ ja

$$J(u) = \inf\{\, J(u) : \ u(-1) = 1, u(1) = -1 \,\}$$

Todistus. Jos

$$\varphi(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\varepsilon}}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

niin

$$\varphi'(x) = \frac{\varepsilon}{(\arctan \frac{1}{\varepsilon})(x^2 + \varepsilon^2)},$$

joten

$$J(\varphi) < \frac{2\varepsilon}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}} \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0^+$. □

Missä Vika ! ? Miksi Dirichlét'n periaate ei toimikaan? Syy (joka ymmärrettiin vasta paljon myöhemmin 1900-luvulla) on se, ettei H^1 (tai H_0^1) ole täydellinen normissa

$$\| \, u \, \| = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Tästä samasta syystä oletettiin, että $p, q \geq \delta$ yhtälössä (SL).[10] Weierstrassin kritiikillä on ollut huomattava merkitys differentiaaliyhtälöiden teorialle ja variaatiolaskennalle, vaikka Dirichlét'n periaate nyt pystytään perustelemaan täsmällisesti Hilbertin avaruuksien teorian avulla.

[10]tämä normi vastaa Sturmin–Liouvillen yhtälöiden normia, kun $q \equiv 0$ ja $p(x) = x^2$!! Koska aikaisemmin totesimme, että oletuksesta $q \geq \delta$ voidaan luopua, niin se, että funktiolla p on vain yksi nollakohta muuttaa tilanteen radikaalisti !!

6. Lineaariset operaattorit

Luvussa 5 osoitimme, että Fourier-sarjat suppenevat L^2-normissa (kts. Seuraus 5.8 sivulla 80). Osoitimme myös, että kun f on jatkuva ja 2π-periodinen funktio, niin Fourier-osasummien *aritmeettiset keskiarvot* suppenevat tasaisesti kohti funktiota f (kts. Fejérin lause 5.4 sivulla 76). Koska nälkä vain kasvaa syödessä, niin voimme miettiä uusia luontevia Fourier-sarjoihin liittyviä kysymyksiä:

Kysymys 1: Suppeneeko Fourier-sarja L^1-normissa, jos f on L^1-funktio ?

Kysymys 2: Suppeneeko jatkuvan funktion Fourier-sarja pisteittäin ? Eli jos $f \in C(0, 2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$, onko

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} S_n(f; x) \text{ kaikilla } x?$$

Näiden kysymysten ratkaisemiseksi meidän on tutkittava Fourier-osasummien $S_n(f; \cdot)$ ominaisuuksia lineaarisena operaattorina $f \mapsto S_n(f; \cdot)$. Itse asiassa, jatkuvan lineaarikuvauksen käsite on funktioanalyysin keskeisiä peruskäsitteitä. Palautetaan lyhyesti mieleen kurssin alkupuolella jo esitellyt lineaariset operaattorit.

Olkoon E ja F vektoriavaruuksia. Kuvaus $T\colon E \to F$ on *lineaarinen*, jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

kun $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Lineaarisesta kuvauksesta käytetään usein nimitystä *lineaarinen operaattori*; näin erityisesti siinä tapauksessa, että T on jatkuva.

Luvussa 2 käsittelimme jo lineaaristen operaattoreiden jatkuvuutta (kts. Määritelmä 2.21 sivulla 20 ja Lause 2.26 sivulla 22). Lisäksi osoitimme, että lineaarikuvaus T on jatkuva jos ja vain jos sen operaattorinormi $\| T \|$ on äärellinen. Lineaarikuvauksen $T\colon E \to F$ Operaattorinormihan määriteltiin

$$\| T \| = \sup_{x\in B_e} \| Tx \|_F.$$

Nyt ryhdymme tarkastelemaan operaattoreiden itsensä muodostamia avaruuksia. Tätä varten otamme käyttöön muutaman uuden merkinnän. Olkoon E ja F normiavaruuksia. Asetamme

$$L(E, F) = \{\, T\colon E \to F : \ T \text{ on lineaarikuvaus} \,\},$$
$$\mathscr{L}(E, F) = \{\, T\colon E \to F : \ T \text{ on jatkuva lineaarikuvaus} \,\},$$

ja erityisesti, kun $F = E$, merkitsemme $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$. Nyt osoittautuu, että jatkuvat lineaariset operaattorit muodostavat normiavaruuden, kun normiksi valitaan operaattorinormi.

6.1. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia, joissa skalaarikuntana on $\mathbb{K}$. Tällöin $\mathscr{L}(E,F)$ on $\mathbb{K}$-kertoiminen normiavaruus, jossa normina on operaattorinormi*

$$T \mapsto \| T \| := \sup\{ \, \| Tx \|_F : \; x \in E, \| x \|_E \leq 1 \, \}.$$

Todistus. Jos $S, T \in L(E,F)$, niin vastaava summaoperaattori on

$$(S+T)(x) = Sx + Tx, \quad x \in E.$$

Kuvaus $V = S+T$ on lineaarinen kuvaus $E \to F$, sillä jos $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, niin

$$\begin{aligned} V(\alpha x + \beta y) &= S(\alpha x + \beta y) + T(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha Sx + \beta Sy + \alpha Tx + \beta Ty \\ &= \alpha(Sx + Tx) + \beta(Sy + Ty) \\ &= \alpha V(x) + \beta V(y) \end{aligned}$$

Samoin kuvaus cS on lineaarinen $E \to F$, kun $(cS)(x) = cSx$, $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$. Toteamme siis, että $L(E,F)$ on vektoriavaruus, kun nolla-alkiona on nollakuvaus $\bar{0}(x) = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$.

Näytämme seuraavaksi, että $\mathscr{L}(E,F)$ on avaruuden $L(E,F)$ vektorialiavaruus ja kuvaus $T \mapsto \| T \|$ on normi vektoriavaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$. Tämän näyttämiseksi käydään läpi normin aksiomat:

(N1) Olkoon $S, T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $x \in B_E = \{ \, x \in E : \; \| x \| \leq 1 \, \}$. Tällöin soveltamalla kolmioepäyhtälöä avaruudessa F saadaan, että

$$\| (S+T)x \|_F = \| Sx + Tx \|_F \leq \| Sx \|_F + \| Tx \|_F \leq \| S \| + \| T \|$$

sillä $\| x \| \leq 1$. Siis

$$\| S + T \| = \sup_{x \in B_E} \| (S+T)x \|_F \leq \| S \| + \| T \|.$$

Edelleen tästä seuraa, että operaattori $S+T$ on jatkuva, joten $S + T \in \mathscr{L}(E,F)$.

(N2) Olkoon $c \in \mathbb{K}$ ja $x \in B_E$. Tällöin $\| cTx \|_F = |c| \| Tx \|_F$, joten

$$\begin{aligned} \| cT \| &= \sup\{ \, \| cTx \|_F : \; x \in B_E \, \} = |c| \sup\{ \, \| Tx \|_F : \; x \in B_E \, \} \\ &= |c| \, \| T \| \end{aligned}$$

Erityisesti tästä seuraa, että $cT \in \mathscr{L}(E,F)$. Nyt yhdessä edellisen kohdan (N1) kanssa tästä seuraa, että $\mathscr{L}(E,F)$ on vektoriavaruuden $L(E,F)$ vektorialiavaruus.

(N3) Operaattorinormin positiivisuus on selvä. Jos $\| T \| = 0$, niin $\| Tx \|_F = 0$ kaikilla $x \in E$ eli $Tx = \bar{0}$ kaikilla $x \in E$. Siispä $T = \bar{0}$, missä $\bar{0}$ on nollaoperaattori, joka on avaruuden $L(E, F)$ nolla-alkio. Käänteinen suunta on selvä.

Siispä $(\mathscr{L}(E, F), \| \cdot \|)$ on normiavaruus. □

Tutkimme seuraavaksi, milloin avaruus $\mathscr{L}(E, F)$ on Banachin avaruus eli täydellinen operaattorinormissa. Tätä ennen pohdimme hiukan erilaisia operaattoreihin liittyviä suppenemiskäsitteitä. Koska lineaariset operaattorit ovat kuvauksia, voimme puhua niiden pisteittäisestä suppenemisesta. Siis jos E ja F normiavaruuksia ja $A \subset E$ osajoukko, niin sanomme että jono (f_n) kuvauksia $f_n \colon A \to F$ *suppenee pisteittäin* joukossa A kohti kuvausta $f : A \to F$, jos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Havaitsemme, että pisteittäinen suppeneminen säilyttää lineaarisuuden eli lineaaristen kuvausten pisteittäinen raja on myös lineaarinen kuvaus.

6.2. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $(T_n) \subset L(E, F)$ jono lineaarikuvauksia, jotka suppenevat pisteittäin kohti kuvausta $T \colon E \to F$. Tällöin $T \in L(E, F)$.*

Todistus. Suoraan laskemalla

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n x + \mu T_n y) \\ &= \lambda T x + \mu T y. \end{aligned}$$

□

Nyt herääkin kysymys, säilyykö lineaarisen kuvauksen jatkuvuuskin pisteittäisessä suppenemisessa ? Vastaus on yleisessä tapauksessa kielteinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

6.3. **Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{P} = \{\, x : \ x$ on $\mathbb{R}$-kertoiminen polynomi $\}$ ja $\| x \|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t)|$, kun $x \in \mathcal{P}$. Määrittemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kuvauksen

$$T_n x = n\big(x(1) - x(1 - \tfrac{1}{n})\big).$$

Tällöin $T_n : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen ja $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$, sillä $|x(1)|, |x(1 - \frac{1}{n})| \le \| x \|_\infty$, joten $\| T_n x \| \le 2n \| x \|_\infty$. Siispä $\| T_n \| \le 2n$. Toisaalta

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = \lim_{n\to\infty} \frac{x(1) - x(1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = x'(1),$$

joten jono (T_n) suppenee *pisteittäin* kohti kuvausta $T\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x'(1)$. Kuitenkaan kuvaus T ei ole jatkuva: jos $x_n(t) = t^n$, niin $\| x_n \|_\infty = 1$ ja

$$|Tx_n| = |x_n'(1)| = n, \text{ joten } \| T \| \leq \sup_n |Tx_n| = \infty.$$

Siis normiavaruuden jatkuvien lineaarikuvausten pisteittäinen raja ei välttämättä olekaan jatkuva. Ehkä yllättäen, täydellisyys pelastaa tilanteen, kuten tulemme näkemään luvussa 7 (käyttämällä tasaisen rajoituksen periaatetta).

Palaamme nyt lyhyen pisteittäisen suppenemisen tarkastelun jälkeen operaattorinormin määräämään suppenemiseen.

6.4. **Määritelmä.** Jos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(E,F)$ ja $T \in \mathscr{L}(E,F)$, niin sanomme, että jono (T_n) suppenee kohti operaattoria T *normin mielessä*, jos

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0.$$

Tällöin merkitsemme $T_n \to T$.

Huomautus. Jos T_n suppenee normin mielessä kohti operaattoria T, niin se suppenee myös pisteittäin, sillä kaikilla $x \in E$,

$$\| T_n x - Tx \| = \| (T_n - T)x \| \leq \| T_n - T \| \, \| x \| \to 0,$$

kun $n \to \infty$.

Käänteinen väite ei kuitenkaan pidä paikkaansa.

6.5. **Esimerkki.** Määrittelemme lineaarikuvaukset $T_n\colon \ell^1 \to \ell^1$ asettaen

$$T_n x = (\underbrace{0,\dots,0}_{n-1 \text{ kpl}}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots),$$

kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\| T_n x \|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \leq \sum_{k=0}^\infty |x_k| = \| x \|_1,$$

kun $x \in \ell^1$, joten kuvaukset T_n ovat jatkuvia ja $\| T_n \| \leq 1$. Edelleen, $T_n(x) \to \bar{0}$ kaikilla $x \in \ell^1$ eli $T_n \to \bar{0}$ pisteittäin.

Kuitenkaan jono (T_n) ei suppene normin mielessä kohti nollaoperaattoria: Jos

$$e_n = (\underbrace{0,\dots,0}_{n-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^1,$$

niin $T_n e_n = e_n$ ja siis $\| Te_n \|_1 = \| e_n \|_1 = 1$, joten $\| T_n \| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olemme jo todenneet, että jatkuvien lineaaristen operaattoreiden pisteittäinen suppeneminen ei takaa jatkuvuutta. Suppeneminen normin suhteen muuttaa tilanteen, kuten seuraava tulos osoittaa. Lisäksi, seuraavan keskeisen tuloksen avulla voimme rakentaa uusia Banachin avaruuksia lähtien tunnetuista avaruuksista.

6.6. **Lause.** *Jos E on normiavaruus ja F on Banachin avaruus, niin $\mathscr{L}(E,F)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon (T_n) Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$ ja $x \in E$. Tällöin on

$$\| T_n x - T_m x \| = \| (T_n - T_m)x \| \leq \| T_n - T_m \| \, \| x \|,$$

kun $n, m \in \mathbb{N}$, joten jono $(T_n x)$ on Cauchyn jono avaruudessa F. Koska F on täydellinen, niin jono $(T_n x)$ suppenee ja merkitään tätä rajaa

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Siispä jono (T_n) suppenee kohti kuvausta T pisteittäin, joten Lauseen 6.2 sivulla 98 nojalla T on lineaarikuvaus $E \to F$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (T_n) on Cauchyn jono avaruudessa $\mathscr{L}(E,F)$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että aina kun $n, m \geq n_0$, niin $\| T_n - T_m \| \leq \varepsilon$. Jos $x \in E$ ja $\| x \| \leq 1$, niin silloin

$$\| T_n x - T_m x \|_F = \| (T_n - T_m)x \|_F \leq \| T_n - T_m \| \, \| x \|_E \leq \| T_n - T_m \| \leq \varepsilon.$$

Pitämällä piste $x \in E$ ja luku $n \in \mathbb{N}$ kiinteinä ja antamalla luvun m kasvaa rajatta tästä seuraa, että

$$\| T_n x - Tx \|_F = \lim_{m\to\infty} \| T_n x - T_m x \|_F \leq \varepsilon,$$

ja siis $\| (T_n - T)x \|_F \leq \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_0$ ja $x \in B_E$. Näin ollen kuvaus $T_{n_0} - T$ on jatkuva, joten myös

$$T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T)$$

on jatkuva. Operaattorinormin ja viimeisimmän arvion nojalla määritelmän nojalla

$$\| T_n - T \| \leq \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$, joten jono (T_n) siis suppenee avaruudessa $(\mathscr{L}(E,F), \| \cdot \|)$. Siispä $(\mathscr{L}(E,F), \| \cdot \|)$ on täydellinen. □

Operaattorien avaruuksissa on myös algebrallista rakennetta, sillä voimme määritellä operaattoritulon yhdistettynä kuvauksina. Seuraava lause sanoo saman formaalimmin.

6.7. **Lause.** *Olkoot E, F ja G normiavaruuksia. Olkoot $T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $S \in \mathscr{L}(F,G)$ rajoitettuja lineaarisia operaattoreita. Silloin yhdistetty kuvaus $ST \in \mathscr{L}(E,G)$ ja*

$$\| ST \| \leq \| S \| \, \| T \|.$$

Todistus. Jatkuvien kuvausten yhdiste on jatkuva ja myös lineaaristen kuvausten yhdiste on lineaarinen. Siispä $ST \in \mathscr{L}(E,G)$. Jos $x \in E$ ja $\| x \| \leq 1$, niin

$$\| STx \|_G = \| S(Tx) \|_G \leq \| S \| \, \| Tx \|_F \leq \| S \| \, \| T \|$$

ja siis $\| ST \| \leq \| S \| \, \| T \|$. □

Huomautus. Banachin avaruutta E sanotaan *Banachin algebraksi*, jos avaruuden E alkioille on määritelty tulo, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\| xy \| \leq \| x \| \, \| y \|, \quad \forall x, y \in E.$$

ja lisäksi algebran ehdot: (seuraavassa $x, y, z \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$)

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z, && \text{(tulon assosiatiivisuus),} \\ x(y+z) &= xy + xz, && \text{(osittelulait) ja} \\ (x+y)z &= xz + yz, && \\ (\lambda x)y = \lambda(xy) &= x(\lambda y), && \text{(skaalarilla kertomisen ja tulon yhteys)} \end{aligned}$$

6.8. **Esimerkki.** a) Lauseiden 6.6 ja 6.7 nojalla $\mathscr{L}(E)$ on Banachin algebra, kun E on Banachin avaruus, normina on operaattorinormi ja tulona ST on kuvausten yhdistäminen.

b) Kun X on kompakti avaruus, niin $C(X)$ on Banachin algebra, kun normina on $\| \cdot \|_\infty$ ja tulona $(fg)(x) = f(x)g(x)$. (HT 9/2006)

6.9. **Lause.** *Olkoon $T\colon E \to F$ lineaarinen bijektio. Tällöin T^{-1} on lineaarinen ja*

(6.10) $\quad$ *T^{-1} jatkuva $\iff$ on olemassa $\alpha > 0$, jolle $\| Tx \| \geq \alpha \| x \|$, $x \in E$.*

Todistus. Jos $x, y \in F$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, niin

$$T(\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y) = \lambda TT^{-1}x + \mu TT^{-1}y = \lambda x + \mu y = T\big(T^{-1}(\lambda x + \mu y)\big).$$

Koska T on bijektio, niin tästä seuraa, että $\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y = T^{-1}(\lambda x + \mu y)$. Siispä T^{-1} on lineaarinen. Osoitetaan seuraavaksi (6.10).

"$\Rightarrow$" Koska $T^{-1}x = \bar{0}$ joss $x = \bar{0}$, niin voidaan olettaa $E \neq \{\bar{0}\}$ ja $F \neq \{0\}$. Tällöin on siis olemassa sellainen $x \in E$, $x \neq 0$, jolle

$$0 < \frac{\| T^{-1}x \|}{\| x \|} \leq \| T^{-1} \|.$$

Siispä $0 < \| T^{-1} \| < \infty$, joten $\| T^{-1} \|^{-1}$ on hyvin määritelty. Jos nyt $x \in E$, niin $\| x \| = \| T^{-1}Tx \| \leq \| T^{-1} \| \| Tx \|$, joten

$$\frac{\| x \|}{\| T^{-1} \|} \leq \| Tx \|,$$

joka on voimassa kaikilla $x \in E$. Valitsemalla $\alpha = \| T^{-1} \|^{-1}$ seuraa väitteen tämä suunta.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että $\| Tx \| \geq \alpha \| x \|$ kaikilla $x \in E$. Jos $y \in F$, niin olkoon $x = T^{-1}y$. Silloin $Tx = y$ ja siis

$$\| T^{-1}y \| = \| x \| \leq \frac{1}{\alpha} \| Tx \| = \frac{1}{\alpha} \| y \|,$$

joka on voimassa kaikilla $y \in F$. Siispä $\| T^{-1} \| \leq 1/\alpha < \infty$. □

6.11. **Seuraus.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T \colon E \to F$ lineaarinen bijektio. Silloin T on homeomorfismi jos ja vain jos on olemassa sellaiset vakiot $\alpha, \beta > 0$, joille*

$$\alpha \| x \| \leq \| Tx \| \leq \beta \| x \|$$

kaikilla $x \in E$.

Todistus. Tämä seuraa välittömästi Lauseesta 2.26 sivulla 22 ja Lauseesta 6.9. □

6.12. *Huomautus.* Jos $T \in \mathscr{L}(E, F)$ toteuttaa Seurauksen 6.11 ehdot, niin sanomme, että T on lineaarinen *isomorfismi* ja että avaruudet E ja F ovat isomorfiset.

6.13. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja olkoon $T \in \mathscr{L}(E, F)$ isomorfismi. Silloin E on täydellinen jos ja vain jos F on täydellinen.*

Todistus. Symmetrian mukaan riittää osoittaa väite vain toiseen suuntaan. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono avaruudessa F. Silloin

$$\| T^{-1}x_n - T^{-1}x_m \| \leq \| T^{-1} \| \, \| x_n - x_m \|$$

ja siis $(T^{-1}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono avaruudessa E. Koska E on täydellinen, niin $T^{-1}x_n \to y \in E$ ja siispä

$$\| x_n - Ty \| = \| T(T^{-1}x_n) - Ty \| \leq \| T \| \, \| T^{-1}x_n - y \| \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Täten myös F on täydellinen. □

Jos normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_2$ ovat ekvivalentteja (kts. Määritelmä 2.9 sivulla 12), niin Lauseen 6.13 nojalla $(E, \| \cdot \|_1)$ on täydellinen jos ja vain jos $(E, \| \cdot \|_2)$ on täydellinen.

6.14. **Esimerkki.** a) Sturmin–Liouvillen yhtälöiden yhteydessä tarkastelimme normia

$$\| f \|_{H^1} = \Big(\int_0^1 (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}$$

ja normia

$$\| f \|_E = \Big(\int_0^1 (|f'(x)|^2 p(x) + |f(x)|^2 q(x)) \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2},$$

missä $0 < \delta \le p, q \le M < \infty$. Silloin osoitimme, että

$$\sqrt{\delta} \| f \|_{H^1} \le \| f \|_E \le \sqrt{M} \| f \|_{H^1}$$

ja siten $\| \cdot \|_{H^1}$ ja $\| \cdot \|_E$ määräävät avaruuteen H^1 saman topologian ja molemmat normit ovat täydellisiä.

b) Jos $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^p$ ja χ_I on välin I karakteristinen funktio, niin kuvaus

$$T\colon (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \chi_{[n,n+1)}(x)$$

määrää isomorfismin $T\colon \ell^p \to E$, missä E on avaruuden $L^p(\mathbb{R})$ aliavaruus. Itse asiassa, T on *isometria* eli $\| Tx \|_{L^p(\mathbb{R})} = \| x \|_{\ell^p}$.

c) Jos $p \ne q$, niin ℓ^p ei ole isometrinen avaruuden ℓ^q kanssa (todistus sivuutetaan). Samoin avaruus L^p on isometrinen avaruuden L^q kanssa $\iff$ $p = q$.

d) Jonoavaruus ℓ^2 on isomorfinen erään avaruuden L^q aliavaruuden kanssa, jos $q \ge 2$. Mutta jos $q < 2$, niin tämä ei päde. Näiden todistukset ovat epätriviaaleja ja sivuutetaan.

e) Jokainen *separoituva* Banachin avaruus E on isomorfinen avaruuden $C(0,1)$ aliavaruuden kanssa (ja tämänkin todistus sivuutetaan).

Todistamme seuraavaksi hyödyllisen laajennusominaisuuden jatkuville operaattoreille.

6.15. **Lause.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus (jota* ei *oleteta suljetuksi) sekä $T\colon M \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva lineaarikuvaus $\widehat{T} : \overline{M} \to F$, jolle $\widehat{T}z = Tz$ kaikilla $z \in M$ ja $\| \widehat{T} \| = \| T \|$.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$. Tällöin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, jolle $z = \lim_{n\to\infty} x_n$. Jos $p, q \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\| Tx_p - Tx_q \| = \| T(x_p - x_q) \| \le \| T \| \| x_p - x_q \|,$$

joten $(Tx_n) \subset F$ on Cauchyn jono. Koska F on Banachin avaruus, niin jonolla $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on raja-arvo $\widehat{T}z \in F$[11]. Havaitaan, että tämä raja-arvo on riippumaton jonon (x_n) valinnasta. Tämä nähdään valitsemalla toinen jono $(y_n) \subset M$, jolle myös $z = \lim y_n$. Toistamalla edellinen päättely jonolle (z_n) löydetään raja-alkio $y = \lim Ty_n \in F$. Koska $\| x_n - y_n \| \to \| z - z \| = 0$, niin kuvauksen T jatkuvuuden nojalla

$$\bar{0} = \lim_{n\to\infty} T(x_n - y_n) = \lim Tx_n - \lim Ty_n = \widehat{T}z - y.$$

Siispä $y = \widehat{T}z$. Päättelemme tästä, että raja-arvo

$$\widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Tx_n$$

riippuu vain pisteestä $z \in \overline{M}$ eikä lainkaan jonon valinnasta. Nyt siis $\widehat{T}$ on kuvaus $\overline{M} \to F$. Jos $z \in M$ ja $x_n = z$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tz,$$

joten $\widehat{T}$ on kuvauksen T laajennus.

Osoitetaan nyt, että $\widehat{T}$ on lineaarinen kuvaus $\overline{M} \to F$. Olkoon $x, y \in \overline{M}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Valitaan sellaiset jonot $(x_n) \subset M$, $(y_n) \subset M$, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ ja } \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Tällöin myös jono $(z_n) = (x_n + \alpha y_n) \subset M$ ja tämä jono suppenee kohti vektoria $x + \alpha y$. Siispä alkuosan perusteella

$$\widehat{T}(x + \alpha y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + \alpha y_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} \alpha Ty_n = \widehat{T}x + \alpha\widehat{T}y.$$

Edellisessä käytimme operaattorin T lineaarisuutta sekä kolmioepäyhtälöä siihen, että raja-arvon voi jakaa kahteen osaan. Edellinen lasku siis osoittaa, että $\widehat{T}$ on lineaarinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\| T \| = \| \widehat{T} \|$. Jos $z \in \overline{M}$, niin valitaan sellainen jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, että $z = \lim x_n$. Tällöin

$$\widehat{T}z = \lim_{n\to\infty} Tx_n.$$

Koska $\| Tx_n \| \le \| T \| \| x_n \|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kolmioepäyhtälön nojalla $\| x_n \| \to \| z \|$, niin

$$\| \widehat{T}z \| = \lim_{n\to\infty} \| Tx_n \| \le \lim_{n\to\infty} \| T \| \| x_n \| = \| T \| \| z \|,$$

joten $\widehat{T}$ on jatkuva ja $\| \widehat{T} \| \le \| T \|$. Jos $z \in M$, niin

$$\| Tz \| = \| \widehat{T}z \| \le \| \widehat{T} \| \| z \|,$$

[11] tässä $\widehat{T}z$ on vain merkintä, joka sanoo, että raja-arvo riippunee pisteestä z

joten myös $\| T \| \leq \| \widehat{T} \|$.

Vielä on osoitettava kuvauksen $\widehat{T}$ yksikäsitteisyys. Olettakaamme, että S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\overline{M} \to F$, jolle $Sz = Tz$ kaikilla $z \in M$. Koska kuvaus $S - \widehat{T}$ on jatkuva $\overline{M} \to F$, niin jokaisella $z \in \overline{M}$ on voimassa

$$Sz - \widehat{T}z = \lim_{n \to \infty} Sx_n - Tx_n = 0,$$

kunhan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ on jono, joka suppenee kohti pistettä z. Siispä $S = \widehat{T}$ kaikilla $z \in \overline{M}$ ja kuvaus $\widehat{T}$ on siten yksikäsitteinen. $\square$

Lause 6.15 on eräs lineaarioperaattoreiden filosofian kulmakivistä. Esimerkkinä tarkastellaan Fourier-muunnosta.

6.16. **Esimerkki.** Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ on integroituva ja $k \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$\text{(F)} \qquad \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \qquad \text{(funktion } f \text{ Fourier-muunnos)}$$

Koska $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$, kun $x, k \in \mathbb{R}$ on yllä mainittu integraali on hyvin määritelty kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R})$. Koska Fourier-sarjojen L^2-teoria on kaikkein toimivin (luku 5), haluaisimme määritellä Fourier-muunnoksen myös kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ongelma: $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, joten (F):n integraali ei ole määritelty kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$[12]. Mikä neuvoksi ?

Ratkaisu: Oletetaan aluksi, että $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tällöin voidaan todistaa Parsevalin identiteetin vastine

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \, \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Toisin sanoen, kun $M = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, niin kuvaus $T : f \to \widehat{f}$ on lineaarinen isometria $\| \cdot \|_2$–normissa. Lauseen 6.15 nojalla kuvaus T laajenee jatkuvaksi lineaarioperaattoriksi $\overline{M} \to L^2(\mathbb{R})$, missä itse asiassa $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$. Näin Fourier-muunnos $\widehat{f}$ saadaan määriteltyä kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Tämä sama prosessi voidaan kuvata konkreettisemminkin. Jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin $f \chi_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kaikilla $n > 0$. Lebesguen dominoidun suppenemisen lause implikoi, että $\| f \cdot \chi_{[-n,n]} - f \|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0$, kun $n \to \infty$, joten Lauseen 6.15 nojalla

$$\widehat{f}(k) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} f(x) e^{-ikx} \, \mathrm{d}x \quad \text{kaikilla } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

[12]Esimerkksi funktio $f(x) = \min\{1, |x|^{-1}\}$ kuuluu $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$

Neumannin sarja

Jos E on Banachin avaruus, $T \in \mathscr{L}(E)$ ja on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $T^{-1} \in \mathscr{L}(E)$, sanomme usein, että T on *kääntyvä* (isomorfismin sijasta). Seuraavalla sovelluksissa hyödyllisellä menetelmällä, eli niin sanottulla *Neumannin sarjalla*, pystymme useissa tilanteissa selvittämään operaattorin kääntyvyyden ja jopa laskemaan käänteisoperaattorin T^{-1}. Merkitsemme avaruuden E identtistä operaattoria merkillä I, siis $Ix = x$ kaikilla $x \in E$. Edelleen operaattorin T iteraatteja merkitsemme $T^0 = I$, $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k kappaletta).

6.17. **Lause** (Neumannin sarja). *Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$ jatkuva lineaarikuvaus. Jos $\| T \| < 1$, niin operaattori $I - T$ on kääntyvä ja*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

missä yo. sarja on normisuppeneva avaruudessa $\mathscr{L}(E)$.

Todistus. Lauseen 6.7 nojalla $\| T^k \| \le \| T \|^k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| T^k \| \le \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k < \infty.$$

mikä suppenee, sillä $\| T \| < 1$ ja oikean puoleisin sarja on geometrinen sarja. Koska $\mathscr{L}(E)$ on Banachin avaruus (kts. Lause 6.6), niin Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla sarja

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k \in \mathscr{L}(E)$$

suppenee. Tarkastellaan nyt osasummia S_n. Koska

$$(I-T)S_n = I + T + \cdots + T^n - (T + T^2 + \cdots + T^{n+1}) = I - T^{n+1} = S_n(I-T),$$

niin $\| (I-T)S_n - I \| \le \| T \|^{n+1} \to 0$, kun $n \to \infty$ eli $(I-T)S = I$. Vastaavasti nähdään, että $S(I-T) = I$, eli S on operaattorin $I-T$ käänteisoperaattori. □

6.18. **Esimerkki.** Palaamme jo johdantoluvussa sekä Banachin kiintopistelauseen yhteydessä tarkastelemaamme esimerkkiin (kts. Esimerkki 3.40 sivulla 45) eli tarkastelemme integraaliyhtälöä

$$(*) \qquad f(x) + \int_0^1 K(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t = g(x), \quad x \in [0,1],$$

missä $K \in C([0,1] \times [0,1])$ on jatkuva ja $\| K \|_\infty < 1$. Osoitamme nyt käyttämällä Neumannin sarjaa, että jos $g \in C(0,1)$, niin tällöin yhtälöllä $(*)$ on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0{,}1)$. Asetetaan

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,1],\ f \in C(0,1).$$

Harjoituksissa olemme jo osoittaneet, että $T \in \mathscr{L}(C(0,1))$ ja $\| T \| \leq \| K \|_\infty < 1$. Nyt voimme soveltaa Neumannin sarjaa operaattoriin $-T$, sillä $\| -T \| = \| T \| < 1$. Siispä operaattori $I+T = I-(-T)$ on kääntyvä, joten kirjoittamalla yhtälö $(*)$ operaattorimuodossa ja käyttämällä operaattorin $I+T$ kääntyvyyttä ja Neumannin sarjaa saamme

$$(I+T)f = g \iff f = (I+T)^{-1}g = \sum_{k=0}^{\infty}(-T)^k g.$$

Sivutuotteena saimme ratkaisulle $f \in C(0,1)$ konstruktion sarjana. Saatua sarjaa kannattaa verrata Banachin kiintopistelauseen antamaan konstruktioon.

Koska kääntyvyys on algebrallinen ominaisuus, niin kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän kaikkien jatkuvien operaattoreiden joukossa. Tämä seuraa seuraavasta huomiosta.

Huomautus. Jos $S, T \in \mathscr{L}(E)$ ja molemmat kääntyviä, niin yhdistetty kuvaus ST on kääntyvä ja $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$, sillä $STT^{-1}S^{-1} = SS^{-1} = I$ ja $T^{-1}S^{-1}ST = T^{-1}T = I$.

Neumannin sarjan avulla voimme myös tarkastella, minkälainen joukko kääntyvien operaattereiden joukko on topologisesti.

6.19. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus. Tällöin*

i) jos $T \in \mathscr{L}(E)$ on kääntyvä ja $S \in \mathscr{L}(E)$ toteuttaa arvion $\| S \| < \| T^{-1} \|^{-1}$, niin tällöin $T - S$ on kääntyvä.

ii) kääntyvien operaattorien joukko $\{\, T \in \mathscr{L}(E) :\ T \text{ kääntyvä} \,\}$ muodostaa avoimen ryhmän avaruudessa $\mathscr{L}(E)$ operaattorintulon suhteen.

Todistus. Koska $T \in \mathscr{L}(E)$ on kääntyvä, niin erotus $T - S$ voidaan esittää tulona $T - S = T(I - T^{-1}S)$. Oletuksen ja Lauseen 6.17 nojalla $\| T^{-1}S \| \leq \| T^{-1} \| \| S \| < 1$, joten Neumannin sarjan nojalla operaattori $I - T^{-1}S$ on kääntyvä. Siispä edellisen huomautuksen nojalla myös operaattoritulo $T(I - T^{-1}S) = T - S$ on kääntyvä. Tämä osoittaa väitteen *i*). Kohta *ii*) seuraa nyt edellisestä huomiosta, että kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän ja kohdasta *i*), jonka nojalla kääntyvien operaattorien joukko on avoin. □

7. Tasaisen rajoituksen periaate

Täydellisyydestä puristetaan maksimaalinen hyöty seuraavan *Bairen lauseen* avulla. Bairen lause on keskeinen todistettaessa kahta funktionaalianalyysin "kolmesta suuresta perustuloksesta", nimittäin *tasaisen rajoituksen periaate* (tämä luku) sekä *avoimen kuvauksen lause* (luku 8). Kolmas näistä suurista perustuloksista (*Hanh–Banachin lause*) tulee dualiteetin yhteydessä luvussa 9, ja se *ei* perustu täydellisyyteen.

Koska Bairen lauseella on muitakin sovelluksia, tarkastelemme sitä yleisissä metrisissä avaruuksissa. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Palautetaan mieliin: jono $(x_n) \subset X$ on Cauchyn jono, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon, \quad \text{aina kun } p, q \geq n_\varepsilon.$$

Aivan kuten normiavaruuksienkin tapauksessa, metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono $(x_n) \subset X$ suppenee.

Bairen lause käsittelee avoimia tiheitä osajoukkoja $V \subset X$. Esimerkkejä tällaisista ovat $V = \mathbb{R}^n \backslash [0,1] \subset \mathbb{R}^n$, kun $n \geq 2$ tai vaikkapa $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Huomautus. Osajoukko $V \subset X$ on tiheä $\iff$ $\bar{V} = X$ $\iff$ $B(x, r) \cap V \neq \emptyset$ kaikilla $x \in X$, $r > 0$ $\iff$ $W \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $\emptyset \neq W \subset X$.

Seuraava lause on nk. Bairen lause tai *Bairen kategorialause*, jonka esitti ensimmäisenä *Rene Baire* (1874–1932).

7.1. **Lause** (Bairen lause). *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Jos $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, on* ***numeroituva*** *kokoelma avoimia tiheitä osajoukkoja, niin*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ on } \textbf{\textit{tiheä}} \text{ avaruudessa } X.$$

Erityisesti siis $\bigcap V_j \neq \emptyset$.

Todistus. Kts. Väisälä: Topologia II, 10.8. □

Bairen lause tulee usein käyttöön seuraavassa (yhtäpitävässä) muodossa:

7.2. **Seuraus.** *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus, ja*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

missä $F_n \subset X$ on suljettu *kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Silloin ainakin yksi joukoista F_n sisältää avoimen pallon (erityisesti* sisus $\operatorname{int}(F_n) \neq \emptyset$*).*

Todistus. Olkoon $V_n = X \setminus F_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, jolloin $V_n \subset X$ on avoin kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että millään $n \in \mathbb{N}$ joukko F_n ei sisällä avointa palloa $B(x, r)$, eli

$$V_n \cap B(x, r) \neq \emptyset \quad \text{kaikilla } x \in X \text{ ja } r > 0.$$

Siispä V_n on tiheä ja avoin jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Nyt Bairen lause mukaan leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ on tiheä avaruudessa X. Erityisesti siis löytyy sellainen alkio $x \in X$, että

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus F_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Mutta tämä on ristiriidassa oletuksen $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ kanssa. Siispä vastaoletus on väärä ja väite seuraa. □

Muotoilemme aluksi ensimmäisen suurista lauseista ja todistamme sen soveltamalla Bairen lausetta.

7.3. **Lause** (Banach–Steinhausin lause eli tasaisen rajoituksen periaate)**.** *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus jaä $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ kokoelma jatkuvia lineaarikuvauksia $T_\alpha \colon E \to F$ (tässä indeksijoukko $J \neq \emptyset$ on mielivaltainen). Tällöin on kaksi toisensa poissulkevaa vaihtoehtoa.*

1. *Joko on olemassa sellainen luku $M < \infty$, että*

$$\| T_\alpha \| \leq M \quad \textit{jokaisella } \alpha \in J,$$

2. *tai on olemassa kiinteä vektori $x \in E$, jolle*

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| = \infty.$$

Erityisesti siis, jos $M(x) := \sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| < \infty$ jokaisella $x \in E$, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha \| = \sup_{\alpha \in J} \sup_{x \in B_E} M(x) < \infty.$$

Huomautus. Jos väite 1. ei toteudu, niin a priori on olemassa *vektorit* $x_\alpha \in E$ $(\alpha \in J)$, joille $\| x_\alpha \| = 1$ ja $\sup_\alpha \| T_\alpha x_\alpha \| = \infty$. Väite 2. sanookin, että voidaan valita *yksi* ja *sama* vektori $x \in E$ kaikilla $\alpha \in J$.

Ennen kuin todistamme Banach–Steinhausin lauseen, tarkastelemme hieman sen käyttöä.

Ensimmäisenä tasaisen rajoituksen periaatteen sovelluksena osoitamme vahvan parannuksen pisteittäisen rajaoperaattorin jatkuvuudelle (katso Esimerkki 6.5 sivulla 99 ja Lause 6.6 sivulla 100).

7.4. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus ja $(T_n) \subset \mathscr{L}(E, F)$ sellainen jono jatkuvia lineaarikuvauksia, että $Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x$ on olemassa kaikilla $x \in E$. Tällöin $T \in \mathscr{L}(E, F)$ eli T on jatkuva.*

Todistus. Kuvaus T on lineaarinen Lauseen 6.2 sivulla 98 nojalla. Oletuksen mukaan jono $(T_n x)$ suppenee avaruudessa F jokaisella $x \in E$. Siispä jono $(T_n x)$ on Cauchyn jono ja edelleen siis Lauseen 3.3 sivulla 25 mukaan rajoitettu. Siispä

$$M(x) \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n x \| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Nyt Banach–Steinhausin Lauseen 7.3 nojalla löytyy sellainen $M < \infty$, että $\| T_n \| \le M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Saadaan siis

$$\| Tx \| = \lim_{n\to\infty} \| T_n x \| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n \| \cdot \| x \| \le M \| x \|$$

kun $x \in E$, joten $\| T \| \le M$. □

Lähtöavaruuden täydellisyys on edellä olennainen ehto:

7.5. **Esimerkki.**
Esimerkin 6.3 sivulla 98 mukaisessa tilanteessa

$$\mathcal{P} = \{ \, x : \; x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi} \, \}$$
$$\| x \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|, \quad \text{ja } T_n x = n\big(x(1) - x(1 - \tfrac{1}{n})\big),$$

kun $x \in P$ polynomi. Esimerkissä 6.3 sivulla 98 näytettiin, että $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ja $T_n x \to Tx$ kun $n \to \infty$. Edelleen osoitettiin, että $Tx = -x'(1)$, kun x polynomi, mutta tällöin Tässä $T \notin \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ei ole jatkuva. Johtopäätökset:

i) $(\mathcal{P}, \| \cdot \|)$ ei ole täydellinen (toinen tapa on näytetty harjoituksissa)
ii) Oletus E Banachin avaruus on *olennainen* Lauseessa 7.4.

Koska olemme saaneet jo hieman esimakua Banach–Steinhausin lauseen tehokkuudesta ja voimasta, niin siirrymme lauseen todistukseen.

Banach–Steinhausin lauseen todistus. Olkoon

$$F(n, \alpha) := \{ \, x \in E : \; \| T_\alpha x \| \le n \, \},$$

kun $\alpha \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f_\alpha \colon x \mapsto \| T_\alpha x \|$ on kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä jatkuva. Siispä $F(n, \alpha) = f_\alpha^{-1}([-n, n]) \subset E$ on suljettu joukko jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$, sillä joukko $[-n, n] \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja f_α on jatkuva. Tällöin myös leikkausjoukko

$$F_n := \bigcap_{\alpha\in J} F(n, \alpha) \subset E \text{ on suljettu,}$$

sillä mielivaltainen leikkaus suljetuista joukoista on edelleen suljettu.

Oletetaan nyt, että vaihtoehto 2. *ei* päde. Väitteen todistamiseksi on siis osoitettava, että tällöin vaihtoehto 1. on välttämättä voimassa.

Olkoon $x \in E$ mielivaltainen. Koska oletimme, että vaihtoehto 2. ei päde, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| < \infty.$$

Siten löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| \le n.$$

Siispä $x \in F(n, \alpha)$ jokaisella $\alpha \in J$ eli $x \in F_n$. Tästä päättelemme välittömästi, että

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Koska E on Banachin avaruus, niin Seurauksen 7.2 nojalla löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$ ja sellainen avoin pallo $B(x_0, r_0)$, että

$$B(x_0, r_0) \subset F_N. \tag{7.6}$$

Osoitamme seuraavaksi, että palloehdosta (7.6) seuraa, että $\| T_\alpha x \| \le 2N/r_0$ jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $x \in B_E(\bar{0}, 1)$. Olkoon $x \in E$ ja $\| x \| < 1$. Tällöin $x_0 + r_0 x \in B(x_0, r_0)$, joten $\| T_a(x_0 + r_0 x) \| \le N$. Siispä

$$\begin{aligned} \| T_\alpha x \| &= \frac{1}{r_0} \| T_\alpha(r_0 x) \| = \frac{1}{r_0} \| T_\alpha(x_0 + r_0 x) - T_\alpha(x_0) \| \\ &\le \frac{1}{r_0} \big(\| T_\alpha(x_0 + r_0 x) \| + \| T_\alpha(x_0) \| \big) \le \frac{2N}{r_0} =: M \end{aligned}$$

Siis $\| T_\alpha \| \le M$ jokaisella $\alpha \in J$. □

7.7. Esimerkki. Olkoon $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sellainen lukujono, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee avaruudessa } \mathbb{R} \textit{ kaikilla } x = (x_k) \in \ell^1. \tag{7.8}$$

Havaitaan, että jos $(a_k) \in \ell^\infty$ on rajoitettu jono, niin (7.8) toteutuu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,|x_k| \le \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \text{kun} \quad x = (x_k) \in \ell^1$$

Siispä sarja $\sum a_k x_k$ suppenee (jopa itseisesti),kun $x = (x_n) \in \ell^1$. Herää kysymys, onko olemassa muita lukujonoja (a_k), joille (7.8) on voimassa? Harjoitustehtävänä (HT 10/2006) osoitimme käänteisen suunnan, eli jos jono (a_k) toteuttaa ehdon (7.8) jokaisella $x \in \ell^1$, niin välttämättä jono $(a_k) \in \ell^\infty$. Sivuhuomatuksen mainittakoon, että tämä esimerkki liittyy läheisesti luvun 9 duaalisuuteen.

Banach–Steinhausin lauseen sovelluksia Fourier-sarjoihin

Muistamme, että C^1-funktioille Fourier-sarja suppenee pisteittäin ja jokaisella L^2-funktiolla Fourier-sarja suppenee ainakin L^2-normin mielessä. Edellisten tietojen valossa seuraava tulos on yllättävä (tämä Banach–Steinhausin lauseen sovellus oli ainakin yllätys löytöaikanaan):

7.9. **Lause.** *On olemassa* jatkuva 2π*-jaksollinen funktio* $f \in C(0, 2\pi)$*, jonka Fourier-sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

hajaantuu *pisteessä* $x = 0$*.*

Todistus. Olkoon

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Näytämme, että on olemassa sellainen jatkuva funktio $f \in C(0, 2\pi)$, jolla $f(0) = f(2\pi)$ ja

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f; 0)| = \infty,$$

mistä erityisesti seuraa, että funktion f Fourier-sarja hajaantuu, kun $x = 0$. Edelleen tästä seuraa, että $S_n(f; 0) \not\to f(0)$, kun $n \to \infty$. Tähän tarvitaan luvun 5 tietoja. Lemman 5.2 sivulla 74 mukaan

$$S_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x - t)\,\mathrm{d}t = (D_n * f)(x),$$

missä D_n on Dirichlet'n ydin

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\big((n + \frac{1}{2})x\big)}{\sin(\frac{x}{2})} \tag{7.10}$$

Asetetaan

$$\Lambda_n(f) = S_n(f; 0).$$

Tällöin kuvaus Λ_n on lineaarinen $C(0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, ja

$$\begin{aligned} |\Lambda_n(f)| &= \frac{1}{2\pi}\Big| \int_0^{2\pi} f(t)D_n(-t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||D_n(-t)|\,\mathrm{d}t \\ &\overset{D_n(-t)=D_n(t)}{\le} \frac{\| f \|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

kun $f \in C(0, 2\pi)$, joten $\| \Lambda_n \| \le (2\pi)^{-1} \| D_n \|_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoitamme, että edellinen arvio on itse asiassa yhtäsuuruus eli osoitamme, että

$$\| \Lambda_n \| \ge \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Lisäksi osoitamme, että

$$\lim_{n\to\infty} \| D_n \|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t = \infty, \tag{7.12}$$

mikä yhdessä edellisen yhtäsuuruuden $\| \Lambda \|_n = (2\pi)^{-1} \| D_n \|_1$ osoittaa yhdessä tasaisen rajoituksen periaatteen väitteen, kuten tulemme pian huomaamaan. Osoitetaan ensin jälkimmäinen väite (eli raja-arvo väite (7.12)), sillä se on suoraviivaisempi osoittaa. Ajatuksena on soveltaa hyvin tunnettua arviota $|\sin(\frac{t}{2})| < \frac{t}{2} < t$, joka on voimassa kaikilla $t > 0$ esitykseen (7.10). Suoraan arvioimalla saamme

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t &\geq \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} \, \mathrm{d}t \geq \int_0^{\pi} |\sin((n+\tfrac{1}{2})t)| \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin s| \frac{\mathrm{d}s}{s} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Osoitamme nyt epäyhtälön (7.11). Olkoon g_n funktio

$$g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } D_n(-t) \geq 0 \\ -1, & \text{kun } D_n(-t) < 0 \end{cases}$$

Tällöin on olemassa jono *jatkuvia* funktioita $(f_j) \subset C(0, 2\pi)$, joille

$$-1 \leq f_j(t) \leq 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{j\to\infty} f_j(t) = g_n(t) \text{ pisteittäin.}$$

Tämä nähdään vertaamalla Lemmaan 5.6 tai tekemällä suora päättely päättely:

tähän tulee kuva!!

Koska $\| f_j \|_\infty \leq 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla, kun majoranttina käytetään funktiota $|D_n| \in L^1$, saadaan

$$\begin{aligned}
\| \Lambda_n \| &\geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \Lambda_n(f_j) \geq \lim_{j\to\infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(t) D_n(-t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(t) D_n(-t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(-t)| \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Siis epäyhtälö (7.11) pätee, ja siten $\| \Lambda_n \| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehto 2. jää jäljelle, sillä suljimme vaihtoehdon 1. pois. Siispä on olemassa sellainen jatkuva $f \in C(0, 2\pi)$, jolle

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\Lambda_n(f)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f; 0)| = \infty,$$

mikä osoittaa väitteen. □

Lisätietoja Fourier-sarjoista:

- Du-Bois–Reymond (1876): *konkreettinen* jatkuva 2π -periodinen f, jonka vastaava Fourier-sarja $\sum \widehat{f}(k)e^{ikx}$ hajaantuu pisteessä $x = 0$ (kts. [Körner: Fourier Analysis, luku 18]).
- Banach ja Steinhaus (n. 1920-luku): Lauseen 7.9 *ei-konstruktiivinen* esimerkki.
- Kolmogorov (1926): on olemassa sellainen integroituva $f \in L^1(0, 2\pi)$, jonka Fourier-sarja hajaantuu *joka* pisteessä $x \in [0, 2\pi]$!

Muistamme, että jos $f \in L^2$, niin funktion f Fourier-sarja suppenee L^2-normin mielessä. Onko sama voimassa funktiolle avaruudessa L^1 ?? Nyt vastaamme tähän Banach–Steinhausin lauseen avulla negatiivisesti.

7.13. **Lause.** *On olemassa sellainen $f \in L^1(0, 2\pi)$, että*

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \Big\|_{L^1} \not\to 0, \quad \textit{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Määritellään $T_n \colon L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ asettamalla

$$(T_n f)(x) = S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx},$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$, $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Selvästi T_n on lineaarinen. Suoraan laskemalla saamme yksinkertaisen arvion funktion f Fourier-kertoimille

$$|\widehat{f}(k)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||e^{ikt}| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \| f \|_1,$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Siispä saamme trigonometrisen polynomin $T_n f$ L^1-normille arvion

$$\| T_n f \|_1 = \Big\| \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \Big\|_1 \le \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)| \, \| e^{ikx} \|_{L^1} \le (2n + 1)\| f \|_1$$

kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten T_n: $L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Väitteen osoittamiseksi teemme vastaoletuksen. Oletamme, että kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n f - f \|_1 = 0.$$

Tällöin jono $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten $\sup \| T_n f \|_1 < \infty$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehdon 1. mukaan $\| T_n \| \leq M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Toisaalta tiedämme, että Fejérin ydin on

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} D_k(x).$$

Tällöin voimme päätellä sivulla 74 oleva Lemman 5.3 sekä Fejérin Lauseen 5.4 (sivulla 76), että $T_n(K_j) = D_n * K_j = K_j * D_n \to D_n$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$. Koska $K_j \geq 0$ ja

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_j(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

niin $(2\pi)^{-1} \| K_j \|_1 = 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$ ja siis

$$2\pi \| T_n \| \geq \sup_j \| T_n(K_j) \|_{L^1} \geq \lim_{j\to\infty} \| T_n(K_j) \|_{L^1} = \| D_n \|$$

Edellisen lauseen todistuksen mukaan $\| D_n \|_1 \to \infty$, joten siis $\| T_n \| \to \infty$, kun $n \to \infty$, mikä johtaa ristiriitaan. Siis $S_n(f; x)$ ei suppene kohti funktiota f normin mielessa avaruudessa L^1 jollakin $f \in L^1(0, 2\pi)$. □

Kolmogorovin tulos vuodelta 1926 ja edellinen lause näyttävät, että Fourier-sarjojen yhteydessä avaruus L^1 poikkeaa huomattavasti avaruudesta L^2. Herää kysymys, miten muut L^p-avaruudet käyttäytyvät? Voidaan todistaa (mutta todistukset sivuutetaan tällä kurssilla), soveltamalla joko funktioteoriaa tai nk. *singulaarisia integraaleja*, että jos $1 < p < \infty$, niin funktion $f \in L^p(0, 2\pi)$ Fourier-sarja suppenee L^p-normissa kohti funktiota f.

Pisteittäisestä suppenemisesta tiedetään tiedetään, jos $1 < p < \infty$ ja $f \in L^p(0, 2\pi)$, niin Fourierin osasumma on

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{m.k. } x \in [0, 2\pi].$$

Tämä tulos on syvällinen *Carlesonin–Huntin* lause 60-luvulta.

8. Avoimen kuvauksen lause

Palautamme aluksi mieleen Topologian kursseilta ehkä tutut perusasiat yleisestä avoimen kuvauksen käsitteestä. Määrittelemme ensin avoimen kuvauksen pisteittäin.

8.1. **Määritelmä.** Olkoon X ja Y ovat topologia avaruuksia, $f\colon X \to Y$ kuvaus sekä $a \in X$. Tällöin sanomme, että f on *avoin pisteessä* a, jos $f(U)$ on pisteen $f(a)$ ympäristö aina, kun U on pisteen a ympäristö[13].

8.2. **Esimerkki.** a) Jos X ja Y ovat metrisiä avaruuksia, niin f on avoin pisteessä a joss jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että

$$B(f(a), r') \subset f(B(a, r)).$$

b) Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ei ole avoin nollassa, sillä $f(-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$, mikä ei ole pisteen $0 = f(0)$ ympäristö.

c) Projektio $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$, on avoin jokaisessa tason $\mathbb{R}^2$ pisteessä.

d) Kuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$, ei ole avoin missään pisteessä; itse asiassa $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \{0\}$ ei sisällä yhtään avointa joukkoa.

e) Olkoon $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$, missä τ_1 on tavallinen euklidinen topologia ja $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$, missä τ_2 on diskreetti topologia. Tällöin identtinen kuvaus $\mathrm{id} : X \to Y$ on avoin jokaisessa $\mathbb{R}$:n pisteessä.

Kuten jatkuvien kuvausten tapauksessa, avoimet kuvauksetkin voidaan määritellä globaalisti. Esitämmekin seuraavaksi globaalin määritelmän avoimelle kuvaukselle, joka liittyy läheisesti pisteittäiseen määritelmään kuten pian huomaamme.

8.3. **Määritelmä.** Jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia, niin kuvaus $f\colon X \to Y$ on *avoin*, jos $f(U)$ on avoin avaruudessa Y aina, kun U on avoin avaruudessa X.

Nyt voimmekin välittömästi yhdistää nämä kaksi käsitettä. On hyvä huomata, että tulos on täysin analoginen vastaavan yhteyden pisteittäisen ja globaalin jatkuvuuden kanssa.

8.4. **Lause.** *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on avoin jos ja vain jos f on avoin jokaisessa pisteessä $a \in X$.*

Todistus.

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että f on avoin, ja olkoon $x \in X$ ja V on pisteen x ympäristö. Tällöin löytyy sellainen avoin joukko U, että $x \in U \subset V$, joten oletuksen

[13]tulkitsemme tässä, että V on pisteen x ympäristö, jos löytyy sellainen avoin joukko U, että $x \in U \subset V$

nojalla $f(U)$ on avoin ja koska $f(x) \in f(U) \subset f(V)$, niin $f(V)$ on pisteen $f(x)$ ympäristö.

"$\Leftarrow$" Kääntäen, jos $U \subset X$ on avoin ja $x \in U$ sen mielivaltainen piste, niin $f(U)$ on pisteen $f(x)$ ympäristö. Siispä löytyy sellainen avoin joukko $V \subset Y$, että $f(x) \in V \subset f(U)$. Erityisesti siis $f(x)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Koska tämä on voimassa jokaisella $x \in U$, niin jokainen piste $f(x) \in f(U)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Siispä $f(U)$ on avoin. □

8.5. *Huomautus.* Jatkuva kuvaus ei aina ole avoin, kuten Esimerkin 8.2 kohta b) osoittaa. Myöskään avoin kuvaus ei ole aina jatkuva; katso saman Esimerkin 8.2 kohta e).

Kuinka avoimen kuvauksen käsite toimii lineaaristen kuvausten yhteydessä? Seuraava tulos näyttää, että lineaarisille kuvauksille avoimuus jo yhdessä pisteessä takaa avoimuuden joka pisteessä. (Vrt. Lause 2.26 sivulla 22)

8.6. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarinen. Tällöin T on avoin kuvaus jos ja vain jos T on avoin pisteessä $\bar{0}$.*

Todistus.

"$\Rightarrow$" Tämä suunta seuraa suoraan Lauseesta 8.4.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Olkoon $x \in E$ ja $r > 0$. Silloin löytyy sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$. Täten

$$T(B(x,r)) = T(x + B(\bar{0}, r)) = Tx + T(B(\bar{0}, r)) \supset Tx + B(\bar{0}, r') = B(Tx, r'),$$

eli T on avoin myös pisteessä x. Lauseen 8.4 nojalla T on avoin. □

Havaitsemme, että jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ on avoin lineaarikuvaus, niin T on surjektio. (HT 11/2006). Tämä havainto tarkoittaa, että topologinen lisäoletus (avoimuus) implikoi algebrallisen tiedon (surjektiivisuus).

Tavoitteenamme on nyt osoittaa, että *Banachin* avaruuksien jatkuville lineaarikuvauksille T myös käänteinen väite pätee: surjektiivisuudesta (joka on pelkkä "algebrallinen" ehto) seuraa, että T on avoin (joka on topologinen ehto!)

Ennen kuin todistamme tämän väitteen, muotoilemme tuloksen tarkasti. Seuraava lause on peräisin *Stefan Banachilta* (1892 – 1945).

8.7. **Lause** (Avoimen kuvauksen lause). *Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio, niin silloin T on avoin kuvaus.*

Kuten tasaisen rajoituksen periaatteen kanssa, ennen kuin ryhdymme todistamaan väitettä, tarkastelemme hieman väitteen seurauksia.

8.8. **Seuraus.** *Jos T on jatkuva lineaarinen bijektio Banachin avaruudesta E Banachin avaruuteen F, niin T on homeomorfismi.*

Todistus. Lauseen 8.7 nojalla T on avoin kuvaus, joten $T(U)$ on avoin avaruudessa F aina, kun U on avoin avaruudessa E. Jos $V \subset F$ on avoin, niin $T^{-1}(V)$ on avoin, koska T on oletuksen mukaan jatkuva. Siis T on homeomorfismi. (Kts. Topologia I, 12.2) □

8.9. **Esimerkki.** Olkoot $x \mapsto \| x \|_1$ ja $x \mapsto \| x \|_2$ normeja vektoriavaruudessa E ja $\| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1$ kaikilla $x \in E$, missä $\beta > 0$. Tällöin identtinen kuvaus $(E, \| \cdot \|_1) \to (E, \| \cdot \|_2)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Jos sekä $(E, \| \cdot \|_1)$ että $(E, \| \cdot \|_2)$ ovat Banachin avaruuksia, niin identtinen kuvaus on Lauseen 8.7 nojalla homeomorfismi, joten normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_2$ ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen on olemassa sellainen $\alpha > 0$, että

$$\alpha \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1,$$

kun $x \in E$. (Katso Lause 2.10 sivulla 12).

Erikoistapauksena tarkastelemme avaruudessa $C = C([0,1], \mathbb{R})$ normeja

$$x \mapsto \| x \|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, \quad x \mapsto \| x \|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\| x \|_1 \leq \| x \|_\infty$, kun $x \in C$, joten identtinen kuvaus $\mathrm{id} : (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Mutta tiedämme, että normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja. Voidaan siis päätellä, että

1. identtinen kuvaus $\mathrm{id} : (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ ei ole avoin kuvaus, sillä se on jatkuva, mutta ei homeomorfismi. Siispä täydellisyys on olennainen avoimen kuvauksen lauseessa.
2. Tästä nähdään myös, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus, sillä muuten avoimen kuvauksen lauseen nojalla $\mathrm{id} : (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ olisi homeomorfismi.

Toinen konkreettisempi tapa nähdä, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus on käytää Lemmaa 5.6, jonka nojalla $(C, \| \cdot \|_1)$ on tiheä Banachin avaruudessa $L^1(0,1)$. Jos $(C, \| \cdot \|_1)$ olisi Banachin avaruus, niin se olisi Lauseen 3.13 sivulla 29 nojalla suljettu avaruudessa $L^1(0,1)$, mutta tiheyden nojalla tällöin olisi $C(0,1) = L^1(0,1)$, mikä osoittaa ristiriidan.

Nyt olemme valmiita aloittamaan avoimen kuvauksen lauseen todistamisen. Tarvitsemme ensin tärkeän aputuloksen, jonka todistamiseen tarvitsemme Bairen lausetta. Ennen kuin ryhdymme tämän apulauseen todistukseen, toteamme, että $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$, aina kun A ja B ovat normiavaruuden E osajoukkoja.

Tämän havaitsemiseen valitsemme $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $x_0 \in A$ ja $y_0 \in B$, että

$$\| x - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \| y - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

joten

$$\| (x + y) - (x_0 + y_0) \| \leq \| x - x_0 \| + \| y - y_0 \| < \varepsilon.$$

Siispä $x + y \in \overline{A + B}$. Huomattakoon, että sisältyvyys voi olla aito (Harjoitustehtävä).

8.10. **Lemma.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus ja T lineaarinen surjektio $E \to F$. Jos V on jokin pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö avaruudessa E, niin $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F.*

Todistus. Koska V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö, on olemassa sellainen $B = B(\bar{0}, r)$, että $B + B \subset V$.

Jos $y \in F$, niin $y = Tx$ jollakin $x \in E$, koska oletimme, että T on surjektio. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $\| x \| < nr$, eli $x \in nB$. Siis

$$y \in T(nB) = nT(B) \subset n\overline{T(B)}.$$

Koska $y \in F$ on mielivaltainen, olemme siis osoittaneet, että

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Tässä $n\overline{T(B)} = \overline{nT(B)}$, sillä kuvaus $x \mapsto nx$ on homeomorfismi $F \to F$. Koska F on Banachin avaruus, voimme soveltaa Bairen lausetta, Seurauksen 7.2 muodossa: Siis ainakin yksi suljetuista joukoista $n\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitsemme jatkossa selvyyden vuoksi avaruuden F palloja notaatiolla B_F.

Jos nyt $B_F(x_0, \rho_0) \subset n\overline{TB}$, niin

$$B_F(\frac{x_0}{n}, \frac{\rho_0}{n}) = \frac{1}{n} B_F(x_0, \rho_0) \subset \overline{T(B)},$$

eli myös joukko $\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitään $x = \frac{1}{n}x_0$ ja $\rho = \rho_0/n$, jolloin siis

$$B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)}.$$

Lisäksi pätee, että $-x \in \overline{T(B)}$. Nimittäin jos $x \in \overline{T(B)}$, niin löytyy sellainen approksimoiva jono $(y_n) \subset T(B)$, että $x = \lim y_n$. Nyt

$$y_n \in T(B) = T(B(\bar{0}, r)) \Longrightarrow -y_n \in T(B) \Longrightarrow -x = \lim(-y_n) \in \overline{T(B)}.$$

Tämän avulla saamme, että

$$\begin{aligned} B_F(\bar{0}, \rho) &= -x + B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)} + \overline{T(B)} \subset \overline{T(B) + T(B)} \\ &= \overline{T(B + B)} \subset \overline{T(V)}. \end{aligned}$$

Siis $\overline{T(V)}$ on $\bar{0} \in F$ ympäristöavaruudessa F. □

Avoimen kuvauksen lauseen todistus: Osoitamme, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Huomautamme, että Lemma 8.10 osoittaa melkein tämän, kunhan vain voisimme korvata joukon $\overline{T(V)}$ joukolla $T(V)$. Todistus perustuukin tämän osoittamiseen.

Olkoon $r > 0$, $r_0 = \frac{1}{2}r$ ja $r_k = 2^{-k}r_0$, kun $k \in \mathbb{N}$. Siis $r_k > 0$ ja

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Lemman 8.10 nojalla löydämme luvut $s_k > 0$, joille

$$B_F(\bar{0}, s_k) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jos $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}$, niin $\| y \| \leq \| T \| r_k \to 0$ ja siksi

$$\lim_{k\to\infty} s_k = 0.$$

Väitämme, että $B_F(\bar{0}, s_0) \subset T(B_E(\bar{0}, r))$. Tätä varten olkoon $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$. Siispä $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_0))}$. Löytyy siis $x_0 \in B_E(\bar{0}, r_0)$, jolle

$$\| y - Tx_0 \| < s_1$$

eli $y - Tx_0 \in B_F(\bar{0}, s_1) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_1))}$. Vastaavasti jatkamalla havaitsemme, että on olemassa sellainen $x_1 \in B_E(\bar{0}, r_1)$, että

$$\| y - Tx_0 - Tx_1 \| < s2,$$

eli $(y - Tx_0 - Tx_1) \in B_F(\bar{0}, s_2) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}$.
Induktioaskel: jos $x_k \in B_E(\bar{0}, r_k)$, $0 \leq k \leq n-1$, ja

$$y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \in B_F(\bar{0}, s_n) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_n))},$$

niin on olemassa sellainen $x_n \in B_E(\bar{0}, r_n)$, että

$$\| y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k \| < s_{n+1}.$$

Saamme siten konstruoitua jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa E, jolle $\| x_k \| < r_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < \sum_{k=0}^{\infty} r_k = 2r_0 = r < \infty,$$

eli sarja $\sum x_k$ on normisuppeneva avaruudessa E. Koska oletimme, että E on täydellinen, niin Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla tiedämme, että sarja $\sum x_k$ suppenee avaruudessa E. Merkitsemme tätä rajaa

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Tällöin

$$\| x \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 2r_0 = r,$$

joten $x \in B_E(\bar{0}, r)$. Koska edelleen

$$\Big\| y - T\sum_{k=0}^{n} x_k \Big\| = \Big\| y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k \Big\| < s_{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$, niin

$$y = \lim_{n\to\infty} T\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k\Big) = T\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k\Big) = Tx.$$

Olemme siis osoittanee seuraavan: Jos $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$, niin $y = Tx$, missä $x \in E$ ja $\| x \| < r$. Toisin sanoen, $T(B_E(\bar{0}, r)) \supset B_F(\bar{0}, s_0)$. Koska $r > 0$ oli mielivaltaisesti valittu, on siis T avoin kuvaus pisteessä $\bar{0}$, joten T on Lauseen 8.6 nojalla avoin kuvaus. □

8.11. *Huomautus.* Avoimen kuvauksen lause voidaan formuloida myös seuraavalla yhtäpitävällä tavalla:
"Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $M < \infty$, että jokaista $y \in F$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle $Tx = y$ ja $\| x \| \leq M\| y \|$."

Todistus. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla löytyy sellainen $\overline{B_F(\bar{0}, 1/M)} \subset T(B_E(\bar{0}, 1))$ jollakin $M < \infty$. Jos nyt $y \in F$, niin

$$\widehat{y} = \frac{y}{M\| y \|} \in \overline{B_F(\bar{0}, 1/M)}$$

ja siten $\widehat{y} = T\widehat{x}$, missä $\| \widehat{x} \| < 1$ eli

$$y = T(M\| y \|\widehat{x}) =: Tx, \quad \text{ja} \quad \| x \| = \| M\| y \|\widehat{x} \| \leq M\| y \|$$

□

8.12. **Seuraus.** *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ jatkuva lineaarinen* injektio. *Tällöin kuva-avaruus $T(E)$ on avaruuden F suljettu aliavaruus jos ja vain jos löytyy sellainen $\beta > 0$, että*

$$\| Tx \| \geq \beta\| x \| \quad \textit{jokaisella } x \in E. \tag{8.13}$$

Huomautus. Jos yllä oleva ehto (8.13) pätee, sanomme että T on *alhaalta rajoitettu.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että $T(E)$ on suljettu. Koska $T(E) \subset F$ on Banachin avaruuden suljettu aliavaruus, niin se on myös Banachin avaruus (Lause 3.13 sivulla 29). Nyt siis $T : E \to T(E)$ on jatkuva bijektio, joten väite seuraa suoraan avoimen kuvauksen lauseesta (kun käytetään edellisen sivun muotoilua).

"$\Leftarrow$"Jos ehto (8.13) pätee, niin

$$\beta\| x \| \leq \| Tx \| \leq \alpha\| x \|$$

jokaisella $x \in E$, koska T on myös jatkuva. Siispä $T \colon E \to T(E)$ on lineaarinen isomorfismi ja Lauseen 6.13 sivulla 102 nojalla $T(E)$ on täydellinen. Nyt Lause 3.13 sivulla 29 mukaan $T(E)$ on suljettu. □

Huomautus. Yleensä jatkuva lineaarinen injektio $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *ei* ole alhaalta rajoitettu. Esimerkiksi operaattori $T : \ell^2 \to \ell^2$, $T(x_k) = (\frac{1}{k}x_k)$, kun $(x_k) \in \ell^2$, on jatkuva lineaarinen injektio. Mutta

$$\| T(0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \|_2 = \frac{1}{k} \to 0,$$

joten T ei ole alhaalta rajoitettu.

Sovellus Fourier-analyysiin

Muistamme, että jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, niin sen Fourier-kertoimet $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ Besselin epäyhtälön nojalla.

Kääntäen, Riesz–Fisherin lauseen mukaan, jos $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, niin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = a_k \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}.$$

Tästä herää seuraavat kysymykset:

1. Onko L^1-funktioille olemassa vastaava jonoavaruus X, jolle $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in X$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$?
2. Onko Riesz–Fischerin lauseella vastinetta avaruudessa L^1 ?

Ensimmäiseen kysymykseen saadaan valoa nk. Riemann–Lebesguen lemmasta:

8.14. **Lause** (Riemann–Lebesguen lemma). *Jos $f \in L^1(0, 2\pi)$, niin*

$$(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}).$$

Todistus. HT 12/2006. □

Siis $X = c_0(\mathbb{Z})$ kelpaa hyvin vastaukseksi kysymykseen 1. Seuraavaksi vastataan kysymykseen 2. eli tarkastellaan onko Riemann–Lebesguen lemman 8.14 käänteinen tulos voimassa (eli onko kysymykseen 2. vastaus myönteinen). Avoimen kuvauksen lauseen avulla osoitamme, että käänteinen tulos ei ole voimassa.

8.15. **Lause.** *Kuvaus $T\colon f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ on jatkuva lineaarinen injektio avaruudelta $L^1(0,2\pi)$ avaruuteen $c_0(\mathbb{Z})$. Kuva-avaruus $T(L^1(0,2\pi))$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, mutta T* ei ole *surjektio.*

Todistus. Selvästi T on lineaarinen. Edellisen lauseen todistus näyttää, että T on jatkuva kuvaus $T\colon L^1 \to c_0$ ja $\| T \| \le (2\pi)^{-1}$. (Itse asiassa: $\| T \| = (2\pi)^{-1}$, sillä jos $f(t) \equiv 1$ kun $t \in [0,2\pi]$, niin $\| f \|_1 = 2\pi$ ja $\| Tf \|_\infty = 1$, koska $\widehat{f}(0) = 1$ ja $\widehat{f}(k) = 0$, kun $k \ne 0$).

Näytetään seuraavaksi, että T on injektio.

On siis osoitettava, että jos $Tf = \bar{0}$, eli $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin itse asiassa $f = \bar{0}$. Oletamme siis, että $Tf = \bar{0}$, joten

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = 0, \quad \text{aina kun } g = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}, \tag{8.16}$$

eli aina kun g on trigonometrinen polynomi. Lauseen 5.4 sivulla 76 ja Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla kaava (8.16) pätee myös kaikilla $g \in C(0,2\pi)$ (mieti yksityiskohdat tarkasti).

Jos nyt $A \subset [0,2\pi]$ on mitallinen joukko, niin Lauseen 5.6 sivulla 78 todistuksen nojalla löytyy sellainen jono $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset C(0,2\pi)$, että

$$|g_n(t)| \le 1 \quad \forall t \in [0,2\pi], n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \chi_A(t) \quad \text{m.k. } t \in [0,2\pi].$$

Soveltamalla taas Lebesguen dominoidun suppenemisen lausetta, niin saamme, että kaava (8.16) pätee myös funktioille $g = \chi_A$.

Olkoon nyt $f \in L^1(0,2\pi)$ positiivinen funktio eli $f \ge 0$. Olkoon $n > 0$ ja olkoon $A_n = \{ t \in [0,2\pi] : \ f(t) > 1/n \}$. Joukko A on mitallinen joukko, sillä f on mitallinen funktio. Nyt soveltamalla kaavaa (8.16) joukon A_n karakteristiseen funktioon χ_{A_n}, jolloin havaitaan että

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\chi_{A_n}(t)\, \mathrm{d}t \ge \frac{1}{n} m(A).$$

Siispä $m(A_n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, joten päättelemme, että myös joukon $A = \bigcup A_n$ mitta $m(A) = 0$. Koska

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ t \in [0,2\pi] : \ f(t) \ge 1/n \} = \{ t \in [0,2\pi] : \ f(t) > 0 \},$$

niin olemme osoittaneet, että $0 \leq f(t) \leq 0$ m.k $t \in [0, 2\pi]$, joten $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$.

Olkoon nyt $f \in L^1(0, 2\pi)$ mielivaltainen. Tällöin funktio f voidaan esittää muodossa

$$f = (u_+ - u_-) + i(v_+ - v_-), \quad u_+, u_-, v_+, v_- \geq 0.$$

Edellisen päättelyn nojalla $u_+ = u_- = v_+ = v_- = 0$ melkein kaikkialla, joten $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$. Olemme siis osoittaneet, että $\operatorname{Ker}(T) = \{\overline{0}\}$ ja T on injektio.

Kuva $T(L^1)$ on tiheä: Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z}) \subset c_0(\mathbb{Z})$ äärellinen jono, ts. $|a_k| = 0$, kun $|k| > m$ (jollakin $m \in \mathbb{N}$). Tällöin trigonometrinen polynomi

$$P(t) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$$

on L^1-funktio, ja

$$\widehat{P}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} a_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} a_k, & \text{jos} \quad n = -m, -m+1, \dots, m \\ 0, & \text{jos} \quad |n| > m \end{cases}$$

Siis $TP = (\widehat{P}(k))_{k\in\mathbb{Z}} = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, joten päättelemme, että $c_{00}(\mathbb{Z}) \subset T(L^1)$. Koska äärelliset jonot c_{00} ovat tiheässä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, joten kuva $T(L^1)$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$.

Lopuksi osoitamme, että $T(L^1) \neq c_0(\mathbb{Z})$ eli T ei ole surjektio. Jos T olisi surjektio, eli $T(L^1) = c_0$, niin silloin $T\colon L^1 \to c_0$ olisi bijektio. Tällöin avoimen kuvauksen lauseen nojalla T olisi isomorfismi, joten erityisesti

$$\| Tf \|_\infty \geq \beta \| f \|_1 \tag{8.17}$$

jokaisella $f \in L^1(0, 2\pi)$.

Toisaalta tiedämme, että Dirichlet'n ydin $D_n(x) \in L^1(0, 2\pi)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja lisäksi $\| (\widehat{D}_n(k)) \|_\infty = 1$. Toisaalta Lauseen 7.9 sivulla 112 todistuksessa osoitimme (kaava (7.12)), että $\| D_n \|_1 \to \infty$. Tämä johtaa ristiriitaan arvion (8.17) kanssa, joten T ei ole surjektio. □

Esitämme vielä *suljetun kuvaajan lauseen* (Lause 8.20 alla), joka on avoimen kuvauksen lauseen sovellus (itse asiassa sen yhtäpitävä versio). Tämän keskeisen tuloksen avulla voidaan usein helpommin todistaa, että annettu lineaarikuvaus on jatkuva.

8.18. **Määritelmä.** Kuvauksen $f\colon X \to Y$ *kuvaaja* on joukko

$$G(f) = \{\, (x, f(x)) \in X \times Y : \ x \in X \,\} \subset X \times Y.$$

Jos E ja F ovat normiavaruuksia, niin varustetaan seuraavassa $E \times F$ normilla

$$\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \| \quad , (x, y) \in E \times F.$$

Tällöin $(E \times F, \| \cdot \|)$ on Banachin avaruus, jos E ja F ovat Banachin avaruuksia (tarkista!). Seuraavaksi yleinen topologinen tieto:

8.19. **Lause.** *Olkoon E ja F normiavaruuksia sekä $f \colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin funktion f kuvaaja $G(f) \subset E \times F$ on suljettu joukko.*

Todistus. Jos $(x, y) \in \overline{G(f)} \subset E \times F$, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen jono $(x_n, y_n) \in G(f)$, että

$$\| (x_n, y_n) - (x, y) \|_{E \times F} \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Määritelmän nojalla $(x_n, y_n) \in G(f)$ tarkoittaa, että $y_n = f(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$\| x_n - x \| \leq \| (x_n, y_n) - (x, y) \|_{E \times F} \to 0,$$

kun $n \to \infty$, joten lisäksi $x_n \to x$ avaruudessa E. Koska oletimme, että f on jatkuva, niin $f(x_n) \to f(x)$ avaruudessa F. Toisaalta $f(x_n) = y_n$ ja vastaavasti kuin jonolle (x_n) voidaan osoittaa, että $f(x_n) = y_n \to y$ avaruudessa F, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $y = f(x)$ eli $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$. Siispä $G(f)$ on suljettu avaruudessa $E \times F$. $\square$

Huomautus. Jos $T \colon E \to F$ on lineaarinen, niin sen kuvaaja $G(T)$ on avaruuden $E \times F$ vektorialiavaruus. Jos E ja F on Banachin avaruuksia, niin edellisen lauseen nojalla ja sitä edeltäneen huomautuksen nojalla $G(T)$ on myös Banachin avaruus.

Suljetun kuvaajan lause kertoo, että käänteinen tulos pätee *lineaarikuvauksille* $T \colon E \to F$, missä E, F ovat Banachin avaruuksia.

8.20. **Lause** (Suljetun kuvaajan lause). *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia, ja $T : E \to F$ sellainen lineaarikuvaus, että kuvaaja*

$$G(T) = \{ \, (x, Tx) : \; x \in E \, \} \subset E \times F \quad \textit{on suljettu joukko.}$$

Tällöin T on jatkuva, eli $T \in \mathscr{L}(E, F)$.

Todistus. Koska $E \times F$ on Banachin avaruus ja kuvaaja $G = G(T)$ on suljettu vektorialiavaruus, niin G on Banachin avaruus Lauseen 3.12 sivulla 29 nojalla. Määritellään kuvaus $\psi : G(T) \to E$ asettamalla

$$\psi\big((x, Tx)\big) = x, \quad (x, Tx) \in G(T).$$

Koska kuvaus T on lineaarinen, niin ψ lineaarinen. Lisäksi ψ on bijektio, sillä selvästi ψ on surjektio ja ψ on myös injektio, sillä

$$\psi\big((x,Tx)\big) = \bar{0} \Longrightarrow x = \bar{0} \Longrightarrow (x,Tx) = (\bar{0},\bar{0}).$$

Lisäksi ψ on rajoitettu, sillä

$$\|\,\psi\big((x,Tx)\big)\,\| = \|\,x\,\| \le \|\,x\,\| + \|\,Tx\,\| = \|\,(x,Tx)\,\|, \quad (x,Tx) \in G(T).$$

Siispä ψ on jatkuva lineaarinen bijektio $G(T) \to E$. Nyt avoimen kuvauksen lauseen 8.7 (tai sen muotoilun Seuraus 8.8) nojalla myös käänteiskuvaus ψ^{-1} on jatkuva, joten ψ on homeomorfismi. Nyt Seurauksen 6.11 sivulla 102 nojalla on olemassa vakio sellainen $\beta > 0$, että

$$\beta\|\,(x,Tx)\,\| \le \|\,\psi\big((x,Tx)\big)\,\| = \|\,x\,\| \quad \text{kaikilla } (x,Tx) \in G(T).$$

Tämän avulla saadaan arvio

$$\beta\|\,Tx\,\| \le \beta(\|\,x\,\| + \|\,Tx\,\|) = \beta\|\,(x,Tx)\,\| \le \|\,x\,\| \quad \text{kaikilla} \quad x \in E.$$

Siis $\|\,Tx\,\| \le (1/\beta)\|\,x\,\|$, joten T on jatkuva. □

8.21. *Huomautus.* Edellisessä lauseessa lineaarisuus on oleellinen oletus, sillä on olemassa epäjatkuva (ja epälineaarinen) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on suljettu (Harjoitustehtävä).

8.22. *Huomautus.* Suljetun kuvaajan lause antaa uuden laskennallisen menetelmän lineaarisen kuvauksen T jatkuvuuden toteamiseen. Lauseen nojalla riittää osoittaa, että $\overline{G(T)} = G(T)$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että jos jokaisella $x \in E$ seuraava ehto toteutuu:

$$(*) \qquad \left.\begin{array}{ll} x_n \to x & \text{avaruudessa } E \\ Tx_n \to y & \text{avaruudessa } F \end{array}\right\} \Longrightarrow y = Tx.$$

Seuraavassa tarkastellaan tyypillistä suljetun kuvaajan lauseen sovelluta.

8.23. **Esimerkki.** Olkoon $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ ”ääretön” matriisi, joka toteuttaa ehdot:

(1) Matriisi (a_{ij}) on rajoitettu, eli

$$M := \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty.$$

(2) Jos $s = (s_j) \in \ell^1$ on mielivaltainen jono, niin $(t_i) \in \ell^1$, kun

$$t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Ehto (2) sanoo, että matriisi (a_{ij}) määrittelee lineaarikuvauksen $A : \ell^1 \to \ell^1$, jolle

$$As = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}s_j\Big)_{i\in\mathbb{N}}, \quad \text{kun} \quad s = (s_j) \in \ell^1.$$

Intuitiivisesti tämä voidaan ajatella seuraavasti:

$$As = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad s = (s_j) \in \ell^1.$$

Harjoitustehtävänä (HT 12/2006) osoitamme, että A on jatkuva käyttämällä suljetun kuvauksen lausetta.

9. Dualiteetti

Jos E on vektoriavaruus, niin merkintä $E^* = L(E, \mathbb{K})$ tarkoittaa avaruuden E *algebrallista duaalia*. Duaalin E^* ovat avaruuden E lineaarisia muotoja. Jos $x' \in E^*$ ja $x \in E$, niin usein merkitään $\langle\, x\,,\, x'\,\rangle$ funktiomerkinnän $x'(x)$ sijasta. Ehto $(x, x') \mapsto \langle\, x\,,\, x'\,\rangle$ määrittelee niin sanotun *kanonisen bilineaarimuodon* $E \times E^* \to \mathbb{K}$.

Normiavaruuden tapauksessa $x' \in E^*$ voi olla jatkuva tai epäjatkuva, joten tämän motivoimana määrittelemme.

9.1. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus, niin $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ on avaruuden E (*topologinen*) *duaali*.

Siis $E' = \{\, x' : \; x'$ on jatkuva lineaarikuvaus $E \to \mathbb{K} \,\}$ ja E' on avaruuden E^* vektorialiavaruus. Jos E on äärellisulotteinen, niin $E' = E^*$. Muussa tapauksessa $E' \neq E^*$. Jos $x' \in E'$, niin funktionaalin x' normi on Lauseen 6.1 sivulla 97 nojalla

$$\|\, x'\,\| = \sup_{\|\, x\,\| \leq 1} |\langle\, x\,,\, x'\,\rangle|.$$

Siis $(E', \|\cdot\|)$ on normiavaruus saman Lauseen 6.1 nojalla.

9.2. **Lause.** *Jos E on normiavaruus, niin $(E', \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 6.6, koska skalaarikunta $\mathbb{K}$ on täydellinen. □

9.3. **Esimerkki.** Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = p/(p-1)$, eli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

joten p ja q ovat *duaalieksponentteja* (katso luku 2, Määritelmän 2.13 sivulla 14 jälkeinen teksti). Näytämme, että avaruuden $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ duaali on isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ kanssa. Merkitään

$$e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1 \text{ kpl.}}, 1, 0, \ldots) \in \ell^p,$$

kun $k \in \mathbb{N}$, ja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

kun $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \|\, x - s_n(x)\,\|_p = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} = 0,$$

eli

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Jos $x' \in (\ell^p)'$, $x \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\langle\, s_n(x)\,,\, x' \,\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle\, e_k\,,\, x' \,\rangle =: \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Koska $\lim s_n(x) = x$ ja x' on jatkuva, niin $\lim\langle\, s_n(x)\,,\, x' \,\rangle = \langle\, x\,,\, x' \,\rangle$, siis

$$\langle\, x\,,\, x' \,\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{9.4}$$

Näytämme, että $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Merkitään

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{|y_k|^q}{y_k}, & \text{kun } y_k \neq 0, \\ 0, & \text{kun } y_k = 0, \end{cases}$$

ja asetetaan jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \in \ell^p.$$

Tällöin

$$\|\, w_n \,\|_p^p = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^p = \sum_{k=0}^{n} |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q.$$

Sijoitetaan kaavaan (9.4) muuttujan x paikalle w_n. Nyt

$$\begin{aligned} A := \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y_k = \langle\, w_n\,,\, x' \,\rangle = |\langle\, w_n\,,\, x' \,\rangle| \leq \|\, w_n \,\|_p \,\|\, x' \,\| \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/p} \|\, x' \,\| = A^{1/p} \|\, x' \,\| \end{aligned} \tag{9.5}$$

Kerrotaan yhtälö (9.5) puolittain luvulla $A^{-1/p}$, jolloin saadaan

$$A^{1-1/p} = A^{1/q} = \Big(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q \Big)^{1/q} \leq \|\, x' \,\|.$$

Siis $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ ja $\|\, y \,\|_q \leq \|\, x' \,\|$. Määrittelemme kuvauksen $T\colon (\ell^p)' \to \ell^q$ asettaen

$$Tx' = y,$$

missä siis $y = (y_k) = (\langle\, e_k\,,\, x' \,\rangle)$. Suoraan määritelmästä seuraa, että T on lineaarinen kuvaus, ja edellä totesimme, että

$$\|\, Tx' \,\|_q \leq \|\, x' \,\|,$$

joten T on jatkuva. Jos $Tx' = \bar{0}$, niin $\langle\, e_k \,,\, x' \,\rangle = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja siis

$$\langle\, s_n(x) \,,\, x' \,\rangle = \sum_{k=0}^{n} x_k \langle\, e_k \,,\, x' \,\rangle = 0,$$

kaikilla $(x_k) \in \ell^p$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska x' on jatkuva ja $\lim s_n(x) = x$, niin päättelemme, että $\langle\, x \,,\, x' \,\rangle = 0$ jokaisella $x \in \ell^p$, joten $x' = \bar{0}$. Siispä T on injektio.

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $y = (y_k) \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön (Lause 2.17 sivulla 14) mukaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Tästä seuraa, että kuvaus $\Lambda_y \colon x \mapsto \sum x_k y_k$ on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^p \to \mathbb{K}$, joten se on eräs duaaliavaruuden $(\ell^p)'$ alkio, ja sen normi

$$\| \Lambda_y \| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}} = \| y \|_q.$$

Määritellään kuvaus $S \colon y \mapsto \Lambda_y$. Edellisen perusteella S on jatkuva lineaarinen kuvaus $S : \ell^q \to (\ell^p)'$, jolle $\| Sy \| \le \| y \|_q$ jokaisella $y \in \ell^q$.

Suoraan operaattorin S määritelmän nojalla $\langle\, e_k \,,\, Sy \,\rangle = y_k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, joten

$$TSy = y \quad \text{kaikilla } y \in \ell^q.$$

Siis $T((\ell^p)') = \ell^q$ ja koska T jo edellä todettiin injektioksi, se on siis bijektio ja S on operaattorin T käänteiskuvaus.

Olkoon nyt $x' \in (\ell^p)'$ ja $y = Tx'$. Tällöin siis $Sy = x'$ ja

$$\| x' \| = \| Sy \| \le \| y \|_q = \| Tx' \|_q \le \| x' \|.$$

Tästä seuraa, että $\| Tx' \|_q = \| x' \|$ joten T on isometrinen isomorfismi $(\ell^p)' \to \ell^q$. Voimme siten samaistaa avaruudet $(\ell^p)'$ ja ℓ^q. Tämän takia usein merkitäänkin $q = p'$.

Koska p ja q ovat symmetrisessä asemassa keskenään, niin vastaavasti ℓ^p ja $(\ell^q)'$ voidaan samaistaa keskenään isometrisesti isomorfisina avaruuksina. Siispä

$$((\ell^p)')' = (\ell^p)'' \cong (\ell^q)' \cong \ell^p.$$

Tämä tulos ilmaistaan sanomalla, että ℓ^p on *refleksiivinen* avaruus, kun $1 < p < \infty$.

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $x' = (y_k) \in \ell^q$, niin kanoninen bilineaarimuoto voidaan siis esittää muodossa (9.4):

$$\langle\, x\,,\, x'\,\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k.$$

Jos erityisesti $p = q = 2$, niin tarkasteltavana on Hilbertin vektoriavaruus ℓ^2. Tällöin on siis edellisen mukaan $(\ell^2)' \cong \ell^2$ ja kanoninen bilineaarimuoto voidaan tulkita sisätuloksi

$$\langle\, x\,,\, x'\,\rangle = (\, x \,|\, \overline{y}\,),$$

missä $\overline{y} = (\overline{y_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Kuvaus $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\overline{y_k})_{k\in\mathbb{N}} = \overline{y}$ on tässä tapauksessa liittolineaarinen ja isometrinen bijektio $\ell^2 \to (\ell^2)'$. Tähän asiaa palataa yleisemmissä puitteissa.

9.6**. Esimerkki.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, esimerkiksi avoin osajoukko ja μ Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon $1 < p < \infty$. Silloin avaruuden $L^p(\Omega)$ duaali on luonnollisella tavalla isometrisesti isomorfinen avaruuden $L^q(\Omega)$ kanssa, missä q on jälleen p:n duaalieksponentti. Tarkemmin sanoen jokaista $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ vastaa yksikäsitteinen $g \in L^q(\Omega)$, jolle

$$\langle\, f\,,\, \varphi\,\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\mu(dx), \quad \text{jokaisella } f \in L^p(\Omega).$$

Katso esimerkiksi W. Rudin: *Real and Complex analysis*, Theorem 6.16. Edelleen, $\|\,\varphi\,\| = \|\,g\,\|_q$. Tulos pätee myös tapauksessa $p = 1$ (jolloin $q = \infty$), mutta tulos ei ole voimassa, kun $p = \infty$.

Huomautettakoon vielä, että täysin edellisen kaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että avaruuden ℓ^1 duaali $(\ell^1)'$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^∞ kanssa. Sen sijaan avaruuden ℓ^∞ duaali $(\ell^\infty)'$ *ei ole* isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa. Itse asiassa duaalia $(\ell^\infty)'$ ei voida esittää minään jonoavaruutena, vaan sen "luonnollisen" esityksen muodostavat äärellisesti additiiviset joukkofunktiot $\mathrm{ba}\,(\mathbb{N})$ eli äärellisesti additiiviset mitat (kts. Köthe, Topologische Lineare Räume, §31)

Hilbertin avaruuden duaali

Olkoon E Hilbertin avaruus ja $x \in E$. Olkoon $f_x \colon E \to \mathbb{K}$ kuvaus

$$z \mapsto (\, z \,|\, x\,), \quad z \in E.$$

Välittömästi voimme todeta, että f_x on lineaarinen. Cauchy–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$|f_x(z)| = |(\, z \,|\, x|\,) \leq \|\, z\,\|\|\, x\,\|$$

jokaisella $z \in E$, joten f_x on jatkuva eli $f_x \in E'$.

9.7. **Lause** (Fréchet–Rieszin lause). *Jos E on Hilbertin avaruus ja $f_x(z) = (\, z \,|\, x \,)$, kun $x \in E$ ja $z \in E'$, niin kuvaus $\Lambda\colon x \mapsto f_x$ määrittelee liittolineaarisen ja isometrisen bijektion $E \to E'$.*

Todistus. Kuvauksen Λ liittolineaarisuus on ilmeinen. Koska

$$|f_x(z)| \leq \|\, x \,\| \|\, z \,\|,$$

on $f_x \in E'$ ja $\|\, f_x \,\| \leq \|\, x \,\|$. Toisaalta

$$\|\, x \,\|^2 = (\, x \,|\, x \,) = f_x(x) = |f_x(x)| \leq \|\, f_x \,\| \|\, x \,\|,$$

joten $\|\, x \,\| \leq \|\, f_x \,\|$ ja siis $\|\, f_x \,\| = \|\, x \,\|$, eli kuvaus Λ on isometria $E \to E'$.

Koska jokainen isometria on injektio, niin olemme jo osoittaneet, että kuvaus Λ on jatkuva lineaarinen injektio, joka on lisäksi isometria. Näytämme seuraavaksi, että Λ on surjektio $E \to E'$.

Olkoon siis $f \in E'$. Jos $f = \bar{0}$, niin $f(z) = (\, z \,|\, \bar{0} \,)$ jokaisella $z \in E$, eli $f = f_{\bar{0}}$. Olettakaamme siis, että $f \neq \bar{0}$. Merkitään

$$M = \mathrm{Ker}\,(f) = \{\, z \in E : \; f(z) = 0 \,\}.$$

Koska f on jatkuva ja yksiö $\{0\}$ on suljettu skalaarikunnassa $\mathbb{K}$, on $M = f^{-1}(\{0\})$ avaruuden E suljettu vektorialiavaruus.[14] Lauseen 4.26 sivulla 63 nojalla $E = M \oplus M^{\perp}$. Koska $f \neq \bar{0}$, on $M \neq E$, joten $M^{\perp} \neq \{\bar{0}\}$. Siispä löytyy sellainen $y \in M^{\perp}$, että $y \neq \bar{0}$.

Olkoon $z \in E$; tällöin

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0,$$

joten $f(z)y - f(y)z \in \mathrm{Ker}\,(f) = M$. Koska $y \in M^{\perp}$, niin tästä seuraa, että

$$(\, f(z)y - f(y)z \,|\, y \,) = f(z)(\, y \,|\, y \,) - f(y)(\, z \,|\, y \,) = 0.$$

Koska $y \neq 0$, niin $(\, y \,|\, y \,) = \|\, y \,\|^2 > 0$, joten edellisestä saadaan esitys

$$f(z) = \left(\, z \;\middle|\; \frac{\overline{f(y)}}{\|\, y \,\|^2} y \right) =: (\, z \,|\, x \,),$$

kun $z \in E$. Olemme siis osoittaneet, että $f(z) = (\, z \,|\, x \,) = f_x(z)$ jokaisella $z \in E$, joten $f = f_x$ ja siis kuvaus Λ on surjektio $E \to E'$. $\square$

Fréchet–Rieszin lauseen mukaan Hilbertin avaruuden E jokainen jatkuva lineaarimuoto voidaan esittää sisätulon avulla seuraavasti: $z \mapsto (\, z \,|\, x \,)$, missä

[14] kts. Topologia I, 15.2.

vektori$x \in E$ on yksikäsitteisesti määrätty ja kyseessä olevan lineaarimuodon normi on $\| x \|$. Kuvausta $x \mapsto f_x$ sanotaan usein *kanoniseksi kuvaukseksi* $E \to E'$.

Hahn–Banachin lause

Olkoon E Hilbertin avaruus, $M \subset E$ sen suljettu aliavaruus, F normiavaruus ja $T \in \mathscr{L}(M, F)$. Tällöin T voidaan jatkaa jatkuvana lineaarikuvauksena koko avaruuteen E, toisin sanoen löytyy sellainen $T_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, jolle $T_1 x = Tx$, kun $x \in M$ ja vieläpä $\| T_1 \| = \| T \|$. Tämä jatko saadaan käyttämällä ortoprojektiota $P_M \colon E \to M$ ja määritellään $T_1 := TP_M$. Jätämme lukijalle harjoitustehtäväksi näyttää, että T_1 on vaadittu jatko.

Jos E onkin vain Banachin avaruus, ei tälle *jatkamisongelmalle* aina ole ratkaisua ! Esimerkiksi, jos $M = c_0$ ja $E = \ell^\infty$, niin $M \subset E$ on avaruuden ℓ^∞ suljettu vektorialiavaruus. Valitaan edelleen $F = c_0$ ja $T \in \mathscr{L}(M, F)$ identtinen kuvaus. Kuitenkin tiedämme, että ei ole olemassa operaattoria $T_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, jolle pätisi $T_1 x = Tx$ jokaisella $x \in M$!

Hahn–Banachin lause liittyy tähän jatkamisongelmaan. Sen seurauksena tiedetään, että E on Banachin avaruus ja F on *äärellisulotteinen*, niin tällöin jokainen $T \in \mathscr{L}(M, F)$ voidaan jatkaa jatkuvana lineaarisena operaattorina koko avaruuteen E.

Hahn–Banachin lause liittyy myös seuraavaan ongelmaan: jos E on normiavaruus ja $x, y \in E$, $x \neq y$, niin löytyykö sellainen duaalin E' alkio, että

$$\langle x \, , \, x' \rangle \neq \langle y \, , \, x' \rangle.$$

Siis tämä on eräänlainen *tunnistamisongelma*; kykenemmekö me erottamaan avaruuden pisteitä jatkuvilla lineaarisilla funktionaaleilla ? Yleisemmin, minkälaiset konveksit joukot voidaan "separoida" toisistaan duaalin E' alkioilla.

Hahn–Banachin lause antaa näihin ongelmiin vastauksen. Lause on hyvin syvällinen, sillä se on itse asiassa ekvivalentti Zornin lemman ja siten valinta-aksiomin kanssa.

Aloitamme todistuksen seuraavalla aputuloksella, jota voi ajatella eräänlaisena induktioaskeleena, sillä Zornin lemma on myös ekvivalentti ns. transfiniittisen induktion kanssa.

9.8**. Lemma.** *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{R}$. Olkoon $M \subset E$ aito vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarimuoto $M \to \mathbb{R}$, että $|f(u)| \le p(u)$ aina, kun $u \in M$. Jos tällöin $z \in E \setminus M$ ja $M_1 = M \oplus span(z)$, niin on olemassa sellainen lineaarimuoto*

$f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$, että $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$ ja $|f_1(w)| \le p(w)$ kaikilla $w \in M_1$.

Todistus. Jos $x, y \in M$, niin

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) = f(x-y) &\le p(x-y) \le p(x+z) + p(-y-z) \\ &= p(x+z) + p(y+z). \end{aligned}$$

Siispä

$$-p(y+z) - f(y) \le p(x+z) - f(x),$$

aina, kun $x, y \in M$. Koska edellisen arvion oikea puoli ei riipu muuttujasta y, niin

$$\sup_{y\in M}(-p(y+z) - f(y)) \le p(x+z) - f(x)$$

ja edelleen, koska edellisen arvion vasen puoli ei riipu muuttujasta x, niin

$$\sup_{y\in M}(-p(y+z) - f(y)) \le \inf_{x\in M}(p(x+z) - f(x))$$

Tästä voimme päätellä, että on olemassa sellainen vakio $c \in \mathbb{R}$, että

$$(9.9) \qquad -p(y+z) - f(y) \le c \le p(x+z) - f(x)$$

kaikilla $x, y \in M$.

Tämän vakion avulla saamme nyt laajennuksen määriteltyä avaruuteen M_1. Jos $w \in M_1 = M \oplus \operatorname{span}(z)$, niin $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset. Määritellään $f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_1(w) = f_1(u + \lambda z) = f(u) + \lambda c,$$

missä c on epäyhtälöparissa (9.9) esiintyvä vakio. Tällöin $f_1 \in M_1^*$ ja $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$. Pyrimme osoittamaan, että $|f_1(w)| \le p(w)$. Tapaus $\lambda = 0$ on selvä, koska $|f| \le p$ aliavaruudessa M. Olkoon siis $\lambda \ne 0$. Epäyhtälöparista (9.9) seuraa, että

$$-p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u) \le c \le p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u),$$

kun $u \in M$ ja siis

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(u+\lambda z) - \frac{1}{\lambda}f(u) \le c \le \frac{1}{|\lambda|}p(u+\lambda z) - \frac{1}{\lambda}f(u),$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälöparin

$$(9.10) \qquad -\frac{1}{|\lambda|}p(w) \le c + \frac{1}{\lambda}f(u)) \le \frac{1}{|\lambda|}p(w)$$

kanssa. Koska

$$c + \frac{1}{\lambda}f(u) = \frac{1}{\lambda}(f(u) + \lambda c) = \frac{1}{\lambda}f_1(w),$$

niin havaitaan, että epäyhtälöpari (9.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \leq \frac{1}{\lambda}f_1(w) \leq \frac{1}{|\lambda|}p(w) \Longrightarrow |f_1(w)| \leq p(w),$$

mikä osoittaa väitteen. □

Lemma 9.8 ilmaisee siis sen, että seminormin majoiroima vektorialiavaruuden lineaarimuoto voidaan jatkaa samanlaiseksi muodoksi yhtä dimensiota laajempaan avaruuteen. Seuraavaksi osoitetaan, että se voidaan jatkaa koko avaruuteen.

9.11. **Lause** (Hahn–Banach). *Olkoon E $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, M sen vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarimuoto $M \to \mathbb{R}$, että $|f(u)| \leq p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarimuoto $g\colon E \to \mathbb{R}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$ ja $|g(x)| \leq p(x)$, kun $x \in E$.*

Todistus. Todistuksen alkuun tarvitsemme hieman merkintöjä. Kun $N_1 \subset N_2$ on kaksi avaruuden E vektorialiavaruutta, $h_1 \in L(N_1, \mathbb{R})$ ja $h_2 \in L(N_2, \mathbb{R})$, niin merkitsemme

$$h_1 \prec h_2 \iff h_2(x) = h_1(x), \text{ kun } x \in N_1.$$

Kun $N \supset M$ on avaruuden E vektorialiavaruus, niin asetamme

$$\mathscr{F}_N = \{\, h \in L(N, \mathbb{R}) : \ f \prec h, \text{ ja } |h(x)| \leq p(x), \text{ kun } x \in N \,\}.$$

Tämän jälkeen merkitsemme vielä

$$\mathscr{F} = \bigcup \{\, \mathscr{F}_N : \ N \text{ on avaruuden } E \text{ aliavaruus ja } N \supset M \,\}.$$

Tällöin $f \in \mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$, joten $\mathscr{F} \neq \emptyset$. Edelleen havaitsemme, että $(\mathscr{F}, \prec)$ muodostaa osittain järjestetyn joukon.

Olkoon

$$\mathscr{G} = \{\, h_i \in \mathscr{F}_{N_i} : \ i \in \mathcal{I} \,\}$$

jokin joukon $\mathscr{F}$ täysin järjestetty osajoukko. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $h, g \in \mathscr{G}$, niin $h \prec g$ tai $g \prec h$. Nyt yhdiste

$$N = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} N_i$$

on avaruuden E vektorialiavaruus, kuten helposti huomataan sen perusteella, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. Voimme määritellä lineaarimuodon $k \in L(N, \mathbb{R})$ asettamalla

$$k(x) = h_i(x), \qquad \text{kun } x \in N_i,$$

mikä on hyvin määritelty, sillä jos $x \in N_i \cap N_j$, niin tällöin $h_i(x) = h_j(x)$. Kuvauksen k lineaarisuus seuraa jälleen välittömästi siitä, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. Suoraan kuvauksen k määritelmän seuraa, että $k \in \mathscr{F}$ ja $h_i \prec k$ kaikilla $i \in \mathcal{I}$. Toisin sanoen k on joukon $\mathscr{G}$ yläraja. *Zornin lemman* (kts. Appendix tai Topologia II, luku 17) nojalla joukossa $\mathscr{F}$ on siten (ainakin yksi) maksimaalinen alkio $g\colon W \to \mathbb{R}$.

Jos $W \neq E$, niin on olemassa $z \in E \setminus W$ ja nyt Lemman 9.8 nojalla löytyy sellainen lineaarimuoto $g_1\colon W \oplus \operatorname{span}(z) = W_1 \to \mathbb{R}$, että $g(x) = g_1(x)$ kun $x \in W$ ja lisäksi $|g(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in W_1$. Todistuksen merkintöjen mukaan tämä tarkoittaa, että $g_1 \in \mathscr{F}_{W_1}$ ja $g \prec g_1$. Siispä $g_1 \in \mathscr{F}$, mutta $g \neq g_1$, joten g ei olisikaan maksimaalinen alkio. Näin ollen on välttämättä $W = E$ ja g on siten etsitty lineaarinen muoto $E \to \mathbb{R}$. □

Lauseen 9.11 perustyyppi on ensimmäisen kerran esiintynyt (hieman rajoitetummassa muodossa) eräässä Hahnin julkaisussa vuonna 1927, ja hiukan Lausetta 9.11 yleisemmässä muodossa Stefan Banachilla vuodelta 1929. Näissä on oleellista se, että E on reaalinen vektoriavaruus. Tämän lauseen yleistivät kompleksiseen avaruuteen vuonna 1938 samanaikaisesti Yhdysvalloissa Bohnenblust ja Sobczyk, sekä Neuvostoliitossa Suhomlinov.

Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus. Koska $\mathbb{R}$ voidaan tulkita kompleksilukujen $\mathbb{C}$ alikunnaksi, on tulo λx määritelty, kun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in E$, joten E voidaan luonnollisella tavalla varustaa myös $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuurilla. Merkitsemme E_r:llä avaruutta E tulkittuna reaaliseksi vektoriavaruudeksi.

Olkoon f lineaarimuoto $E \to \mathbb{C}$, eli $f \in E^*$. Merkitsemme

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

kun $x \in E$ ja missä $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$ ja edelleen

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \quad g_2 = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}).$$

Siispä f_1, f_2 ovat $\mathbb{R}$-lineaarisia muotoja $E_r \to \mathbb{R}$. Koska $f(ix) = i f(x)$, kun $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix) = i(f_1(x) + i f_2(x)) = i f_1(x) - f_2(x).$$

Tästä seuraa, että

$$f_1(ix) = \operatorname{Re}(f(ix)) = \operatorname{Re}(i f_1(x) - f_2(x)) = -f_2(x),$$

eli $f_2(x) = -f_1(ix)$, joten saamme esityksen

$$f(x) = f_1(x) - i f_1(ix), \tag{9.12}$$

kun $x \in E$.

Kääntäen, jos f_1 on lineaarimuoto $E_r \to \mathbb{R}$ ja asetamme

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix),$$

kun $x \in E$. Siis f on kuvaus $E \to \mathbb{C}$. Koska $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$, niin välittömästi toteamme kuvauksen f määritelmän nojalla, että $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Jos $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) - if_1(-x) = f_1(ix) + if_1(x) = i(f_1(x) - if_1(ix) = if(x).$$

Olkoon nyt $c = a + ib \in \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, ja olkoon $x \in E$. Edellä tehtyjen havaintojen nojalla on tällöin

$$f(cx) = f((a+ib)x) = f(ax)+f(ibx) = af(x)+if(bx) = (a+ib)f(x) = cf(x).$$

Siis f on lineaarimuoto $E \to \mathbb{C}$.

Olemme siten todistaneet, että algebrallisen duaalin E^* alkiot ovat täsmälleen ne kuvaukset $f\colon E \to \mathbb{C}$, jotka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix),$$

missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarimuoto $E_r \to \mathbb{R}$.

Tämän avulla voimme nyt osoittaa kompleksisen version Hahn–Banachin lauseesta.

9.13. **Lause** (Bohnenblust–Sobczyk–Suhomlinov). *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$, missä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Olkoon M avaruuden E vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarimuoto $M \to \mathbb{K}$, että $|f(u)| \le p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarimuoto $g\colon E \to \mathbb{K}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$, ja $|g(x)| \le p(s)$ kaikilla $x \in E$.*

Todistus. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on sama kuin Lause 9.11. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tällöin

$$f(u) = f_1(u) - if_1(iu), \tag{9.14}$$

kun $u \in M$, missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarimuoto $M_r \to \mathbb{R}$. Koska

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}),$$

niin

$$|f_1(x)| = \frac{1}{2}|f(x) + \overline{f(x)}| \le \frac{1}{2}(|f(x)| + |\overline{f(x)}|) = |f(x)|,$$

ja siis $|f(x)| \le p(x)$, kun $x \in M$.

Hahn–Banachin lauseen 9.11 nojalla on siis olemassa sellainen $\mathbb{R}$-lineaarinen muoto $g_1\colon E \to \mathbb{R}$, että $g_1(u) = f_1(u)$, kun $u \in M$, ja $|g_1(x)| \le p(x)$ kaikilla $x \in E_r$. Asetamme:

$$g(x) = g_1(x) - ig_1(ix), \tag{9.15}$$

kun $x \in E$. Tällöin g on lineaarimuoto $E \to \mathbb{C}$ ja $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$. Vielä on osoitettava, että $|g(x)| \le p(x)$ jokaisella $x \in E$.

Olkoon $x \in E$. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda \in \mathbb{C}$, että $|\lambda| = 1$ ja

$$g(x) = \lambda^{-1}|g(x)|$$

Tällöin $g(\lambda x) = \lambda g(x) = |g(x)| \in \mathbb{R}$, joten kuvauksen g määritelmän (9.15) nojalla on siis

$$g(\lambda x) = g_1(\lambda x).$$

Koska $|\lambda| = 1$, niin suoraan laskemalla saamme nyt, että

$$|g(x)| = |\lambda|\,|g(x)| = |\lambda g(x)| = |g(\lambda x)| = |g_1(\lambda x)| \le p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x).$$

Näin ollen g täyttää vaaditut ehdot. $\square$

9.16. *Huomautus.* Myös Lausetta 9.13 sanotaan usein *Hahn–Banachin* lauseeksi, samoin kuin esimerkiksi seuraavaa lausetta, jota voidaan pitää Lauseen 9.13 seurauslauseena.

Seuraavaksi sovellamme edellä olleita lauseita erilaisten *jatkuvien* lineaaristen funktionaalien rakentamiseen normiavaruuksissa tai Banachin avaruuksissa.

9.17. **Lause.** *Olkoon E normiavaruus, M sen vektorialiavaruus ja $u' \in M'$. Tällöin on olemassa sellainen $x' \in E'$, että $\langle u, x' \rangle = \langle u, u' \rangle$, kun $u \in M$, ja $\| x' \| = \| u' \|$.*

Todistus. Määritellään seminormi p avaruudessa E asettamalla

$$p(x) = \| x \| \, \| u' \|,$$

kun $x \in E$. Tällöin

$$|\langle u, u' \rangle| \le \| u \| \, \| u' \| = p(u),$$

kun $u \in M$ ja siis Lauseen 9.13 nojalla on olemassa sellainen $x' \in E^*$, että $\langle u, x' \rangle = \langle u, u' \rangle$, kun $u \in M$ ja

$$|\langle x, x' \rangle| \le p(x) = \| x \| \, \| u' \|$$

kaikilla $x \in E$. Siispä x' on jatkuva eli $x' \in E'$, ja $\| x' \| \le \| u' \|$. Toisaalta,

$$\begin{aligned} \| u' \| &= \sup\{ \, |\langle u, u' \rangle| : \ \| u \| \le 1, \ u \in M \, \} \\ &= \sup\{ \, |\langle u, x' \rangle| : \ \| u \| \le 1, \ u \in M \, \} \\ &\le \sup\{ \, |\langle x, x' \rangle| : \ \| x \| \le 1, \ x \in E \, \} = \| x' \|, \end{aligned}$$

joten $\| x' \| = \| u' \|$. $\square$

Lauseen 9.17 mukaan siis normiavaruuden vektorialiavaruuden jatkuva lineaarimuoto voidaan jatkaa koko avaruuden jatkuvaksi lineaarimuodoksi siten, että sen normi säilyy muuttumattomana (mikä on erityisen hyödyllistä).

9.18. **Lause.** *Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus, $x_0 \in E$ ja $d = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $x' \in E'$, että $x'(M) = \{0\}$, $\langle\, x_0\,,\, x'\,\rangle = d$ ja $\|\, x'\,\| = 1$.*

Todistus. Merkitään $W = M \oplus \operatorname{span}(x_0)$. Jos $z \in W$, niin $z = u + \lambda x_0$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ ovat yksikäsitteisiä. Asetetaan $\langle\, z\,,\, z'\,\rangle = \lambda d$. Tällöin z' on lineaarinen muoto $W \to K$ eli $z' \in W^*$. Jos $\lambda = 0$, niin $\langle\, z\,,\, z'\,\rangle = 0$ kaikilla $z \in M$, joten siis $z'(M) = \{0\}$. Oletamme seuraavassa, että $\lambda \neq 0$. Tällöin

$$|\langle\, z\,,\, z'\,\rangle| = |\lambda d| \leq |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} + x_0 \right\| = \|\, u + \lambda x_0\,\| = \|\, z\,\|,$$

sillä $d \leq \|\, \lambda^{-1}u + x_0\,\|$, koska $\lambda^{-1}u \in M$. Siispä $z' \in W'$ ja $\|\, z'\,\| \leq 1$.

Näytetään nyt, että $\|\, z'\,\| = 1$. Tätä varten valitaan $\varepsilon > 0$. Koska $d = \inf\{\, \|\, x_0 - u\,\| :\ u \in M\,\}$, niin löytyy sellainen $u \in M$, että $\|\, x_0 - u\,\| < d + \varepsilon$. Nyt

$$|\langle\, x_0 - u\,,\, z'\,\rangle| = |\langle\, x_0\,,\, z'\,\rangle| = d,$$

joten soveltamlla tietoa $\|\, (x_0 - u)/\|\, x_0 - u\,\|\,\| = 1$ saadaan

$$\begin{aligned}\|\, z'\,\| &= \sup\{\, |\langle\, u\,,\, z'\,\rangle| :\ u \in W,\ \|\, u\,\| \leq 1\,\} \geq \frac{|\langle\, x_0 - u\,,\, z'\,\rangle|}{\|\, x_0 - u\,\|} \\ &= \frac{d}{\|\, x_0 - u\,\|} > \frac{d}{d+\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{d+\varepsilon},\end{aligned}$$

mistä päättelemme, että $\|\, z'\,\| \geq 1$. Nyt voimme soveltaa Lausetta 9.17, joka takaa sellainen jatkuvan lineaarifunktionaalin $x' \in E'$ olemassaolon, jolle $\langle\, x\,,\, x'\,\rangle = \langle\, x\,,\, z'\,\rangle$, kun $x \in W$, ja $\|\, x'\,\| = \|\, z'\,\|$. Tällöin $x'(M) = \{0\}$, $\langle\, x_0\,,\, x'\,\rangle = \langle\, x_0\,,\, z'\,\rangle = d$ ja $\|\, x'\,\| = 1$. □

9.19. **Seuraus.** *Jos $x_0 \neq \bar{0}$ on normiavaruuden E vektori, niin on olemassa sellainen $x' \in E'$, että $\langle\, x_0\,,\, x'\,\rangle = \|\, x_0\,\|$ ja $\|\, x'\,\| = 1$.*

Todistus. Jos $M = \{\bar{0}\}$, niin $\operatorname{dist}(x_0, M) = \|\, x_0\,\|$. Väite seuraa siten välittömästi Lauseesta 9.18. □

9.20. **Seuraus.** *Jos E on normiavaruus ja $x \in E$, niin*

$$\|\, x\,\| = \sup\{\, |\langle\, x\,,\, x'\,\rangle| :\ x' \in E',\ \|\, x'\,\| \leq 1\,\}.$$

Todistus. Jos $\|\, x'\,\| \leq 1$, niin

$$|\langle\, x\,,\, x'\,\rangle| \leq \|\, x\,\|\,\|\, x'\,\| \leq \|\, x\,\|,$$

joten

$$\sup_{\| x' \| \leq 1} |\langle\, x \,,\, x' \,\rangle| \leq \| \, x \, \|.$$

Jos $x = \bar{0}$, niin $\| \, x \, \| = 0 = \sup|\langle\, x \,,\, x' \,\rangle|$, joten oletamme, että $x \neq \bar{0}$. Nyt Seurauksen 9.19 nojalla on olemassa sellainen $x' \in E'$, että

$$|\langle\, x \,,\, x' \,\rangle| = \| \, x \, \| \quad \text{ja} \quad \| \, x' \, \| = 1,$$

joten $\| \, x \, \| \leq \sup|\langle\, x \,,\, x' \,\rangle|$. □

9.21. **Seuraus.** *Jos E on normiavaruus ja $x \in E$ on sellainen vektori, että $\langle\, x \,,\, x' \,\rangle = 0$ kaikilla $x' \in E'$, niin $x = \bar{0}$.*

Todistus. Jos $\langle\, x \,,\, x' \,\rangle = 0$ kaikilla $x' \in E'$, niin Seurauksen 9.20 nojalla $\| \, x \, \| = 0$ ja siis $x = \bar{0}$. □

9.22. **Lause.** *Olkoon M normiavaruuden vektorialiavaruus. Tällöin M on tiheä avaruudessa E silloin ja vain silloin kun avaruudella M on seuraava ominaisuus: Jos $x' \in E'$ ja $x'(M) = \{0\}$, niin $x' = \bar{0}$.*

Todistus. HT 13/2006. □

Bilineaarimuodot ja Lax–Milgramin lause

Fréchet–Rieszin lauseen sovelluksena todistamme Lax–Milgramin lauseen, jota voi soveltaa differentiaaliyhtälöihin. Lause koskee Hilbertin avaruuksien bilineaarimuotoja.

9.23. **Määritelmä.** Olkoon E, F ja G vektoriavaruuksia. Sanomme, että kuvaus $B\colon E \times F \to G$ on bilineaarinen, jos $x \mapsto B(x,y)$ on lineaarinen jokaisella $y \in F$ ja $y \mapsto B(x,y)$ on lineaarinen jokaisella $x \in E$.

9.24. **Lause.** *Olkoon E, F ja G normiavaruuksia. Tällöin bilineaarinen kuvaus $B\colon E \times F \to G$ on jatkuva $\iff$ on olemassa sellainen $M < \infty$, että $\| \, B(x,y) \, \| \leq M \| \, x \, \| \| \, y \, \|$ kaikilla $(x,y) \in E \times F$.*

Todistus. HT 13/2006. □

Fréchet–Rieszin lauseen avulla voimme nyt karakterisoida Hilbertin avaruuksien bilineaarimuodot eli bilineaarikuvaukset, joissa maaliavaruutena on $\mathbb{K}$.

9.25. **Seuraus.** *Olkoon E $\mathbb{R}$-kertoiminen Hilbertin avaruus ja $B\colon E \times E \to \mathbb{R}$ bilineaarinen ja jatkuva. Silloin on olemassa yksikäsitteinen $T \in \mathscr{L}(E)$, jolle*

$$B(x,y) = (\, x \,|\, Ty \,) \quad \textit{jokaisella } x, y \in E.$$

Todistus. Jos $y \in E$, niin kuvaus $B_y \colon x \mapsto B(x,y)$ on jatkuva ja lineaarinen, eli $B_y \in E'$. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on olemassa sellainen *yksikäsitteinen* alkio $T(y) \in E$, että

$$B(x,y) = (\, x \,|\, T(y)\,) \quad \text{jokaisella } x \in E.$$

Kuvaus $T \colon y \mapsto T(y)$ on lineaarinen (HT). Se on myös jatkuva, sillä

$$\|\, Ty \,\|^2 = (\, Ty \,|\, Ty \,) = B(y, Ty) \le M \|\, y \,\| \|\, Ty \,\|,$$

joten $\|\, Ty \,\| \le M \|\, y \,\|$ jokaisella $y \in E$. □

9.26. **Määritelmä.** Kun E on Hilbertin avaruus, niin sanomme, että bilineaarimuoto $B \colon E \times E \to \mathbb{R}$ on *koersiivinen*, jos löytyy sellainen $C > 0$, että $B(x,x) \ge C \|\, x \,\|^2$ jokaisella $x \in E$.

9.27. **Lause** (Lax–Milgram)**.** *Olkoon B jatkuva, koersiivinen bilineaarimuoto Hilbertin avaruudessa E. Jos $w \in E'$, niin on olemassa yksikäsitteinen $u \in E$, jolle*

$$B(x,u) = \langle\, x \,,\, w \,\rangle \quad \textit{jokaisella } x \in E. \tag{9.28}$$

Todistus. Olkoon $w \in E'$. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen $v \in E$, jolle $\langle\, x \,,\, w \,\rangle = (\, x \,|\, v \,)$ jokaisella $x \in E$. Seurauslauseen 9.25 mukaan voimme löytää operaattorin $T \in \mathscr{L}(E)$, jolle $B(x,y) = (\, x \,|\, Ty \,)$ jokaisella $x, y \in E$. Koska B on koersiivinen, niin T on bijektio. Valitaan $u = T^{-1}v$, jolloin $B(x,y) = (\, x \,|\, v \,) = \langle\, x \,,\, w \,\rangle$ kaikilla $x \in E$, joten ehto (9.28) on voimassa.

Jos myös u_1 toteuttaa ehdon (9.28), on alkion v yksikäsitteisyyden nojalla

$$B(x,u_1) = \langle\, x \,,\, w \,\rangle = (\, x \,|\, v \,) = (\, x \,|\, Tu \,)$$

jokaisella $x \in E$. Seurauslauseen (9.25) mukaan saamme, että $Tu = Tu_1$ ja koska T on bijektio, niin $u = u_1$. □

Sovellamme Lax–Milgramin lausetta seuraavan epähomogeeniseen Sturmin–Liouvillenongelmaan (vertaa luvun 5 käsittelyä)

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f, & \text{kun } x \in (0,1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases} \tag{SL'}$$

missä $p \in C^1(0,1)$, $q \in C(0,1)$, $f \in L^2(0,1)$ ovat annettuja ja $p(x) \ge \alpha > 0$ ja $q(x) \ge 0$. Muistutamme, että $H_0^1(0,1) = \{\, f \in H^1(0,1) : \; f(0) = f(1) = 0 \,\}$ on Sobolevin avaruuden $H^1(0,1)$ suljettu vektorialiavaruus. Tarvitsemme seuraavan aputuloksen

9.29. **Lemma** (Poincarén epäyhtälö). *On olemassa vakio $C > 0$, jolle*

$$\| f \|_{H^1(0,1)} \leq C \| f' \|_{L^2(0,1)}$$

kaikilla $f \in H_0^1(0,1)$.

Todistus. Jos $f \in H_0^1(0,1)$, niin Lauseen 5.21 sivulla 87 nojalla melkein kaikilla $x \in [0,1]$ on voimassa

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \Big| \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leq \| f' \|_{L^1(0,1)},$$

mistä seuraa, että $\| f \|_\infty \leq \| f' \|_1$. Hölderin epäyhtälön nojalla siis

$$\| f \|_2^2 \leq \| f \|_\infty \| f \|_1 \leq \| f' \|_1 \| f \|_2 \leq \| f' \|_2 \| f \|_2,$$

joten $\| f \|_2 \leq \| f' \|_2$. Siispä väite seuraa nyt avaruuden $H^1(0,1)$ normin määritelmästä. □

9.30. **Lause.** *Tehtävällä* (SL') *on yksikäsitteinen heikko ratkaisu $u \in H_0^1(0,1)$. Jos $f \in C(0,1)$, on $u \in C^2(0,1)$ ja se on tehtävän* (SL') *klassinen ratkaisu.*

Heikko ratkaisu tarkoittaa tässä funktiota $u \in H_0^1(0,1)$, jolle

$$\int_0^1 p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.31}$$

jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$.

Todistus. 1. Kuten luvussa 5 näemme, että jokainen tehtävän (SL') klassinen ratkaisu on myös heikko ratkaisu.

2. Määritellään Hilbertin avaruudessa $E := (H_0^1(0,1), \| \cdot \|_{H^1(0,1)}$ bilineaarimuoto

$$B(u,v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Koska $p, q \in C(0,1)$, niin $\| p \|_\infty, \| q \|_\infty \leq M$ jollakin $M < \infty$. Siispä Hölderin epäyhtälön avulla saamme

$$|B(u,v)| \leq M \int_0^1 |u'(x)v'(x)| + |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \leq C \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1},$$

joten B on jatkuva. Poincarén epäyhtälön seurauksena B on myös koersiivinen, sillä

$$\begin{aligned} \| u \|_{H^1}^2 \leq C \| u' \|_{L^2}^2 &= C \int_0^1 u'(x)^2\,\mathrm{d}x \leq C\alpha^{-1} \int_0^1 p(x)u'(x)^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq C\alpha^{-1} \int_0^1 p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2\,\mathrm{d}x = C\alpha^{-1} B(u,u). \end{aligned}$$

Edellä käytimme hyväksi oletusta $p(x) \geq \alpha$ ja $q(x) \geq 0$.

3. Löydämme tehtävän (SL’) heikon ratkaisun nyt seuraavasti: Koska $f \in L^2(0,1)$ on lineaarikuvaus
$$w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) f(x)$$
jatkuva $E \to \mathbb{R}$, joten $w \in E'$. Lax–Milgramin lauseen nojalla (sillä B toteuttaa Lax–Milgramin lauseen ehdot) löydämme yksikäsitteisen funktion $u \in E$, jolle
$$B(\varphi, u) = \int_0^1 p(x)\varphi'(x)u'(x) + q(x)\varphi(x)v(x)\,\mathrm{d}x = w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) f(x)$$
jokaisella $\varphi \in E$. Määritelmän (9.31) nojalla tämä on tehtävän (SL’) yksikäsitteinen heikko ratkaisu (sillä $\mathscr{D}(0,1) \subset E$).
4. Kuten luvussa 5, voimme osoittaa, että $u \in C^2(0,1)$ jos $f \in C(0,1)$.

□

Huomautamme vielä, että yleisempi tehtävä
$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f, & \text{kun } x \in (0,1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$
missä p, q ja f ovat kuten edellä ja $r \in C(0,1)$, palautuu tehtävään (SL’) kertomalla ylempi yhtälö funktiolla
$$\zeta(x) = \exp\Big(-\int^x \frac{r(t)}{p(t)}\,\mathrm{d}t\Big)$$
ja käyttämällä identiteettiä $\zeta' p + \zeta r = 0$. (Katso Brezis, VIII. 4, mistä löytyy myös muita Lax–Milgramin lauseen sovelluksia).

Biduaali

9.32. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus, niin $E'' := (E')'$ on avaruuden E *biduaali.*

Tiedämme jo, että normiavaruuden E biduaali on aina Banachin avaruus. Olkoon $x \in E$ kiinteä ja tarkastellaan sen määräämää kuvausta $J_x \colon E' \to \mathbb{K}$,
$$J_x x' = \langle\, x\,,\, x'\,\rangle.$$
Havaitsemme, että $J_x \in (E')'$: kuvaus J_x on lineaarinen, sillä
$$J_x(x' + \alpha y') = \langle\, x\,,\, x' + \alpha y'\,\rangle = \langle\, x\,,\, x'\,\rangle + \alpha\langle\, x\,,\, y'\,\rangle = J_x(x') + \alpha J_x(y'),$$
kun $x', y' \in E'$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Edelleen
$$|J_x(x')| = |\langle\, x\,,\, x'\,\rangle| \le \|\, x\,\|\|\, x'\,\|,$$
joten J_x on myös jatkuva.

Siispä jokaisella $x \in E$, on kuvaus $J_x \in E''$, joka siis riippuu vektorista x. Merkitsemme näin muodostunutta kuvausta $J\colon E \to E''$, $Jx = J_x$. Kuvauksen J määrittelee siis ehto

$$\langle\, x' \,,\, Jx \,\rangle = \langle\, x \,,\, x' \,\rangle,$$

kun $x \in E$ ja $x' \in E'$. Sanomme, että J on *kanoninen kuvaus* $E \to E''$.

9.33. **Lause.** *Jos E on normiavaruus, niin kanoninen kuvaus $J\colon E \to E''$ on lineaarinen isometria.*

Todistus. HT 13/2006. □

Koska E'' on Banachin avaruus, niin lauseen 9.33 mukaan $J(E) \subset E''$ on vektorialiavaruus, joka on isometrisesti isomorfinen avaruuden E kanssa. Nyt jos E on Banachin avaruus, niin $J(E)$ on suljettu. Jos E ei ole täydellinen, ei myöskään $J(E)$ ole suljettu. Kuitenkin voimme puhua vektorialiavaruuden $J(E)$ sulkeumasta avaruudessa E''. Sanommekin, että Banachin avaruus $\overline{J(E)}$ on avaruuden E *täydentymä* ja merkitsemme $\widehat{E} := \overline{J(E)}$.

Jokaiselle normiavaruudelle E siis löytyy Banachin avaruus F (esimerkiksi $F = \widehat{E}$) ja sellainen lineaarinen isometria $T\colon E \to F$, että $T(E) \subset F$ on tiheä. Voidaan myös osoittaa, että jokainen tällainen F on itse asiassa lineaarisesti isometrinen täydentymän $\widehat{E}$ kanssa.

9.34. **Määritelmä.** Normiavaruus E on *refleksiivinen*, jos $J(E) = E''$.

Koska E'' on aina Banachin avaruus, niin välttämätön ehto refleksiivisyydelle on, että E on Banachin avaruus. Jos E on refleksiivinen, niin E ja E' ovat toisiinsa nähden symmetrisessä asemassa.

9.35. **Esimerkki.** a) Jokainen äärellisulotteinen normiavaruus on refleksiivinen: tällöin on nimittäin $E' = E^*$ ja siis $\dim(E) = \dim(E') = \dim(E'')$, joten J on bijektio.

b) Jos $1 < p < \infty$, niin ℓ^p on refleksiivinen: $(\ell^p)' =$ ‘, missä q on p:n duaalieksponentti $(1/p + 1/q = 1)$, ja

$$\langle\, x \,,\, y' \,\rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p$, $y' = (y_l) \in$ ‘.

c) Vastaavasti, jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, voidaan osoittaa, että $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$. Dualiteetilla on luonnollinen esitys

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle = \int_\Omega f(t)g(t)d\mu$$

missä $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

d) Seuraavat avaruudet eivät ole refleksiivisiä: c_0, c, ℓ^1, ℓ^∞, $C(0,1)$, $L^1(\Omega)$ ja $L^\infty(\Omega)$.
e) Olkoon E Hilbertin avaruus, $x \in E$ ja $z \in E$. Jos merkitsemme $f_x(z) = (\, z \,|\, x \,)$, niin Fréchet–Rieszin lauseen mukaan kuvaus $x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen ja isometrinen bijektio $E \to E'$. Tästä seuraa, että kanoninen kuvaus $J\colon E \to E''$ on bijektio ja siis jokainen Hilbertin avaruus on refleksiivinen. Separoituvan avaruuden tapauksessa tämä tulos sisältyy jo esimerkkiin b).
f) Jos E on refleksiivinen avaruus ja M on avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin M on refleksiivinen (Pettisin lause; kts. esim. Taylor, s. 192)

Refleksiivisyys on yhteydessä Banachin avaruuden geometrian esim. Milmanin lauseen muodossa: Jokainen tasaisesti konveksi Banachin avaruus on refleksiivinen.

10. Transpoosi ja adjungaatti

Olkoot E ja F normiavaruuksia, joilla on skalaarikuntana $\mathbb{K}$. Olkoon $T \in \mathscr{L}(G, F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Jos funktionaali $y' \in F'$, niin yhdistetty kuvaus $y' \circ T : \ E \to \mathbb{K}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, eli $y' \circ T \in E'$. Merkitään

$$T'y' := y' \circ T$$

Tällöin siis

$$T'y'(x) = (y' \circ T)(x) = y'(Tx) \iff \langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle = \langle\, Tx \,,\, y' \,\rangle,$$

kun $x \in E$ ja $y' \in F$. Kuvausdiagrammina tämä näyttää seuraavalta (vrt. Vektoriavaruudet, luku 12, §76).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T'y'"'] & & F \arrow[dl, "y'"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Pitäen vektoria $y' \in F'$ muuttujana toteamme, että ehto $y' \mapsto T'y'$ määrittelee kuvauksen $T' \colon F' \to E'$.

10.1. **Määritelmä.** Edellä konstruoitua kuvausta $T' \colon F' \to E'$ sanotaan operaattorin T (topologiseksi) *transpoosiksi* tai *adjungaatiksi.*

10.2. **Lause.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Tällöin adjugantti $T' \in \mathscr{L}(F', E')$ on jatkuva lineaarinen operaattori ja $\|\, T' \,\| = \|\, T \,\|$.*

Todistus. T' lineaarinen: Olkoot $y', z' \in F'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sekä $x \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned}\langle\, x \,,\, T'(\alpha y' + \beta z') \,\rangle &= \langle\, Tx \,,\, \alpha y' + \beta z' \,\rangle = \alpha \langle\, Tx \,,\, y' \,\rangle + \beta \langle\, Tx \,,\, z' \,\rangle \\ &= \alpha \langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle + \beta \langle\, x \,,\, T'z' \,\rangle = \langle\, x \,,\, \alpha T'y' + \beta T'z'. \,\rangle\end{aligned}$$

Siis kuvauksina $E \to \mathbb{K}$ pätee $T'(\alpha y' + \beta z') = \alpha T'y' + \beta T'z'$.
T' jatkuva: Olkoot $y' \in F'$ ja $x \in E$. Tällöin

$$|\langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle| = |\langle\, Tx \,,\, y' \,\rangle| \le \|\, y' \,\| \; \|\, Tx \,\| \le \|\, T \,\| \; \|\, y' \,\| \; \|\, x \,\|,$$

joten

$$\|\, T'y' \,\| = \sup_{x \in B_E} |\langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle| \le \|\, T \,\| \|\, y' \,\|,$$

kun $y' \in F'$, joten erityisesti T' on jatkuva lineaarioperaattori $F' \to E'$, ja Lauseen 8.4 sivulla 116 ja Lemman 8.10 sivulla 119 nojalla

$$\|\, T' \,\| = \sup_{y' \in B_{F'}} \|\, T'y' \,\| \le \|\, T \,\|.$$

Toisaalta, Seurauksen 9.20 mukaan

$$\begin{aligned}\| Tx \| &= \sup_{y' \in B_{F'}} |\langle Tx , y' \rangle| = \sup_{y' \in B_{F'}} |\langle x , T'y' \rangle| \le \sup_{y' \in B_{F'}} \| T'y' \| \| x \| \\ &= \| T' \| \| x \|\end{aligned}$$

Siis $\| T \| \le \| T' \|$, jolloin $\| T' \| = \| T \|$. □

Adjungaatti

Olkoon E Hilbertin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$. Kun $y \in E$, niin kuvaus $x \mapsto (Tx \,|\, y)$ määrittelee duaalin E' alkion. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on siis olemassa yksikäsitteinen $z \in E$, jolle $(Tx \,|\, y) = (x \,|\, z)$ kaikilla $x \in E$. Määrittelemmekin kuvauksen $T^* \colon E \to E$, jota nimitämme operaattorin T *adjungaatiksi*, asettamalla $T^*(y) = z$.

10.3. **Lause.** *Kun E on Hilbertin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$, niin $T^* \in \mathscr{L}(E)$ ja $\| T^* \| = \| T \|$.*

Todistus. Kuten Lauseen 10.2 todistus, mutta pienin muutoksin. □

Jätämme lukijan kiinnostuksen varaan todeta seuraavat adjungaatin ominaisuudet ($S, T \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$):

1. $T^{**} = T$
2. $(S + T)^* = S^* + T^*$
3. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$
4. $\bar{0}^* = \bar{0}$, $I^* = I$
5. T on kääntyvä avaruudessa $\mathscr{L}(E)$ jos ja vain jos T^* on kääntyvä. Tällöin $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
6. $\| T \|^2 = \| T^*T \|$

10.4. **Esimerkki.** a) Jatkuva lineaarikuvaus $T \colon E \to F$ on *äärellisasteinen*, jos on olemassa sellaiset funktionaalit $x'_1, \dots, x'_n \in E'$ ja vektorit $y_1, \dots, y_n \in F$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, että

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x , x'_k \rangle y_k,$$

kun $x \in E$.[15] Määrätään adjugantti T': Jos $y' \in F'$ ja $x \in E$, niin

$$\begin{aligned}\langle Tx , y' \rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x , x'_k \rangle y_k , y' \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x , x'_k \rangle \langle y_k , y' \rangle \\ &= \Big\langle x , \sum_{k=1}^{n} \langle y_k , y' \rangle x'_k \Big\rangle = \langle x , T'y'. \rangle\end{aligned}$$

[15] Kääntäen, jos $T \in \mathscr{L}(E, F)$ ja $\dim T(E) < \infty$, voidaan osoittaa, että on olemassa sellaiset $x'_1, \dots, x'_n \in E'$ ja $y_1, \dots, y_n \in F$, joille edellinen pätee.

Koska edellinen identiteetti on voimassa kaikilla $x \in E$, niin päättelemme, että

$$T'y' = \sum_{k=1}^{n} \langle\, y_k\,,\, y'\,\rangle x'_k.$$

Siispä myös transpoosi $T'\colon F' \to E'$ on äärellisasteinen.

b) Olkoon $T : \ell^1 \to c_0$ kuvaus

$$Tx = (\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=2}^{\infty} x_j, \dots),$$

kun $x = (x_j) \in \ell^1$. Selvästi T on lineaarinen ja

$$\|\, Tx\,\|_\infty = \sup_n \Big|\sum_{j=n}^{\infty} x_j\Big| \le \sup_n \sum_{n=j}^{\infty} |x_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|\, x\,\|_1,$$

joten $T \in \mathscr{L}(\ell^1, c_0)$. Määrätään $T' : c_0' \to (\ell^1)'$. Koska $c_0' = \ell^1$ ja $(\ell^1)' = \ell^\infty$, niin $T'\colon \ell^1 \to \ell^\infty$. Lisäksi, kun $z' = (z_n) \in \ell^\infty$, niin $z_k = \langle\, e_k\,,\, z'\,\rangle$, kun $k = 1, 2, \dots$ ja $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$.

Olkoon $x' = (y_k) \in \ell^1$ mielivaltainen. Tällöin jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ on

$$\langle\, e_k\,,\, T'x'\,\rangle = \langle\, Te_k\,,\, x'\,\rangle = \sum_{j=1}^{k} y_j,$$

sillä $Te_k = (1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots)$. Siis

$$T'x' = (\sum_{j=1}^{n} y_j)_{n\in\mathbb{N}} = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots)$$

kun $x' = (y_k) \in \ell^1$.