0. Johdanto

Funktionaalianalyysissa tutkitaan muun muassa

- ääretönulotteisten vektoriavaruuksien, ja erityisesti täydellisten normiavaruuksien eli Banach avaruuksien ominaisuuksia.
  (joskus myös yleisempien topologisten vektoriavaruuksien ominaisuuksia).
- näiden välisten jatkuvien lineaaristen (tai epälineaaristen) kuvausten ominaisuuksia.
- edellisten kohtien monia eri sovelluksia.

Yritämme seuraavan esimerkin kautta selvittää, miksi tällaisia kysymyksiä tutkitaan, ja samalla myös millaisia sovelluksia funktionaalianalyysillä tyypillisesti on.

Esimerkki: Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s) f(s) ds = g(x), \quad x \in [0,1], \tag{0.1}$$

missä $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Tehtävänä on löytää funktio f, jolle yhtälö (0.1) pätee.
Käy ilmi että

i) jos parametri $|\lambda|$ on pieni, yhtälön ratkaisu olemassa ja yksikäsitteinen; toisaalta

ii) kaikilla $|\lambda|$:illa näin ei välttämättä ole; herää siis kysymys mitä voidaan sanoa näistä poikkeuksellisista parametreista.

Tällaisiin kysymyksiin päädytään esimerkiksi monissa fysiikan kysymyksissä, vaikkapa viulun kielen ominaisvärähtelyjä määrättäessä. Itse asiassa, yksi matemaattisen fysiikan keskeisistä kysymyksistä 1900–luvun taitteessa oli selittää miksi ominaisvärähtelyjen joukko (so. poikkeusparametrien joukko) on diskreetti; kysymys palautui differentiaaliyhtälöiden kautta tyyppiä (0.1) oleviin yhtälöihin.

Huomaa että funktio $K(x,s)$ voi olla hyvinkin monimutkainen, eikä yhtälön suora integrointi, tavalla tai toisella, voi tulla kysymykseen; korkeintaan voimme hakea numeerisia ratkaisuja, kunhan yhtälöt kunnolla ymmärretään. Miten yhtälöitä (0.1) voisi silloin lähestyä ?

Tilanteen selvittämistä varten identifioidaan ensin (mahdollisten) ratkaisujen avaruus; luonnollinen arvaus on seuraava vektoriavaruus joka esiintyy jo Analyysi I:ssä (entisessä Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1:ssä),

$$C(0,1) = \{ \ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ jatkuva välillä } [0,1] \ \}$$

Avaruuteen liittyy luonnollinen ”etäisyyden” mitta, eli normi (tästä myöhemmin paljon lisää):

$$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| < \infty \quad , \ f \in C(0,1).$$

Pari ($C(0,1), \| \cdot \|_\infty$) tulee olemaan tyypillinen esimerkki *Banachin avaruudesta.*

Yhtälöön (0.1) liittyy operaattori

$$T : C(0,1) \to C(0,1), \quad (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s) f(s) ds$$

Huomataan, että tämä on avaruuden $C(0,1)$ luonnollisen yhteenlaskun suhteen *lineaarinen*, so.

$$T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 T(f) + \lambda_2 T(g) \quad \forall \ f, g \in C(0,1)$$

Lisäksi, yhtälö (0.1) voidaan kirjoittaa muotoon

$$f - \lambda \, T(f) = g$$

Kysymys on siis siitä, onko lineaarinen operaattori $I - \lambda T$ kääntyvä (bijektio) ! Integraaliyhtälömme on nyt muuttunut lineaarisen operaattorin ominaisarvotehtäväksi, ja ratkaisua varten meidän tulee kehittää ”lineaarialgebrallisia” menetelmiä vektoriavaruuksissa kuten $C(0,1)$.

Nopeasti havaitaan kuitenkin selvä pulma: vektoriavaruus $C(0,1)$ on äärettönulotteinen ! Ei siis ole ollenkaan selvää mitkä/millä ehdoin lineaarialgebran tulokset yleistyvät näihin uusiin avaruuksiin. Tai mitä operaattoreilta vaaditaan, että lineaarialgebran ominaisarvotehtävät yleistyvät näihin äärettönulotteisiin tilanteisiin.

Funktionaalianalyysi pyrkii vastaamaan tämän tyyppisiin kysymyksiin, kehittämään äärettönulotteisten avaruuksien teoriaa silmälläpitäen esim. yllä kuvatun kaltaisia sovelluskohteita. Tällä kurssilla selvitämme Banach avaruuksien perusominaisuudet, keskeisimmät esimerkit (funktio- yms.)avaruuksista sekä myös Banach avaruuksien operaattoreiden perusominaisuudet. Pyrimme myös antamaan esimerkkejä teorian sovelluksista, ja tulemme mm. osoittamaan yo. väitteen i); jos aika riittää kurssin loppupuolella voidaan myös tarkastella kysymystä ii).

Sana "funktionaali" tarkoitti alunperin (noin 1880 – 1910) sellaista jatkuvaa kuvausta, jonka määrittelyjoukko on jokin "funktioavaruus"; tyypillisesti

$$\varphi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{tai}$$

$$\phi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_0^1 f(s)^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{(epälineaarinen funktionaali).}$$

Nyttemmin termin käyttö on hieman muuttunut, kuten myöhemmin huomaamme.

Funktionaalianalyysin *sovellusaloja* ovat muun muassa

– (muu) klassinen analyysi (reaali-, kompleksi- ja harmoninen analyysi)

– variaatiolaskenta ja approksimaatioteoria

– differentiaali- ja integraaliyhtälöt (TDY,ODY)

– matemaattinen fysiikka (kvanttimekaniikka, ...)

– dynaamiset systeemit

– optimointi

– numeerinen analyysi (teoria)

– tn-teoria ja stokastiikka

⋮

Kääntäen, analyysi ja sen sovellukset synnyttävät jatkuvasti uusia funktionaalianalyysin tutkimuksia.

1. Metriikka ja metrinen avaruus

1.1. **Määritelmä.** Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *metriikka* X:ssä, jos

(M1) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$ (*"kolmioepäyhtälö"*)

(M2) $d(y,x) = d(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$

(M3) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*Huom:* $d(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$)

Sanomme, että (X,d) eli joukko X varustettuna metriikalla d, on *metrinen avaruus* (yleensä jätetään d merkitsemättä, jos se selviää yhteydestä).

Huomautus.

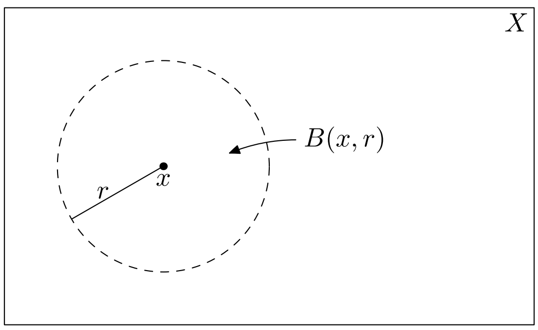
(1) Funktionaalianalyysin peruskurssilla metriikka d on (yleensä) jonkin normin indusoima (vrt. luku 2).
(2) Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *semimetriikka*, jos d toteuttaa aksiomat (M1), (M2) sekä aksioman

(M4) $d(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Merkintöjä: Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $x \in X$, $r > 0$:

$B(x,r) = \{\, y \in X : \ d(x,y) < r \,\}$ *avoin* x-keskinen, r-säteinen pallo

$\overline{B}(x,r) = \{\, y \in X : \ d(x,y) \leq r \,\}$ *suljettu* x-keskinen, r-säteinen pallo.



Kuva 1. Avoin pallo $B(x,r)$ metrisessä avaruudessa (X,d)

Oletamme, että lukija on tutustunut metristen avaruuksien perusteisiin (vrt. esim. [Väisälä : Topologia I]). Lukijan tulisi kerrata mitä metrisissä avaruuksissa tarkoittavat käsitteet avoin joukko, suljettu joukko ja kompakti joukko; samoin mitä tarkoitetaan ympäristöllä, ympäristökannalla, aliavaruudella, suppenevalla pistejonolla, jatkuvalla kuvauksella,.....

Muistamisen helpottamiseksi listaamme alla lyhyesti eräitä näistä käsitteistä.

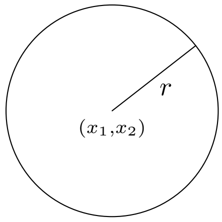
Olkoon (X, d) metrinen avaruus:

- avoimet ja suljetut joukot: joukko $A \subset X$ on *avoin* jos jokaista $x \in A$ vastaa sellainen $r = r_x > 0$, että avoin pallo
$$B(x, r) \subset A$$
$A \subset X$ on *suljettu* jos komplementti
$$A^{\complement} = \{ x \in X : x \notin A \} \text{ on avoin}$$
- metriikan indusoima *topologia* on joukkoperhe
$$\tau_d = \{ A \subset X : A \text{ on avoin } X\text{:ssä } \}.$$
- ympäristökanta, relatiivitopologia
- jonon raja-arvo ja suppeneminen: jono $(x_n) \subset X$ *suppenee* kohti $x \in X$, jos
$$d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$
Siis jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Merkintä:
$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \text{ tai } \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$
- jatkuva kuvaus : Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f\colon X \to Y$ on *jatkuva* pisteessä $x \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, että
$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina kun } d(x, y) < \delta \text{ (ja } y \in X).$$
f on *jatkuva X:ssä* jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.
- kompakti joukko (Heine-Borel, ...)

1.2. **Esimerkki.** $\mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella metriikalla
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2},$$
kun $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. (erikoistapaus $n = 1 : \ d(x, y) = |x - y|, \ x, y \in \mathbb{R}$).

Kuvaus d on metriikka : TopoI, DII (tai myöhemmin avaruuden ℓ^p yhteydessä). Kun $n = 2$ ja $x = (x_1, x_2)$, niin $y = (y_1, y_2) \in B\big(x, r\big)$ jos ja vain jos $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2$.

Metrinen avaruus (X, d) on *separoituva*, jos on olemassa numeroituva osajoukko $A \in X$, niin että joukon A sulkeuma $\bar{A} = X$. Sanomme myös, että A



KUVA 2. Avoin tason $\mathbb{R}^2$ pallo $B((x_1, x_2), r)$

on *tiheä* X:ssä. Sulkeuma voidaan kuvailla metriikan d avulla: jos $A \in X$, niin A:n *sulkeumalle* $\bar{A}$ on

$$x \in \bar{A} \iff \text{on olemassa sellainen jono } (x_n) \subset A, \quad \text{että } d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Separoituvuusehto $\bar{A} = X$ tarkoittaa siis: jos $y \in X$ ja $\varepsilon > 0$ ovat mielivaltaisia, niin on olemassa sellainen alkio $x \in A$, että $d(x, y) < \varepsilon$.

1.3. **Esimerkki.** $(\mathbb{R}^n, d)$ on separoituva, kun d on euklidinen etäisyys.

Todistus. Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on annettuja, niin valitaan jokaisella $j \in \{1, \dots, n\}$ sellainen rationaaliluku $q_j \in \mathbb{Q}$, että

$$|x_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \; j = 1, \dots, n,$$

mikä on mahdollista, sillä $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tällöin $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n$, joka on numeroituva ($\mathbb{Q}$ on numeroituva) ja

$$d(x, q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j - q_j|^2}_{<\frac{\varepsilon^2}{n}}} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

□

1.4. **Lause.** *Olkoon X metrinen avaruus ja oletetaan, että on olemassa ylinumeroituva kokoelma $\mathcal{U}$ avaruuden X avoimia pistevieraita epätyhjiä osajoukkoja. Silloin X* ei ole *separoituva.*

Todistus. Vastaoletus: Oletetaan, että X on separoituva. Tällöin $X = \overline{A}$, missä $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ numeroituva.

Jos $U \in \mathcal{U}$, niin $U \subset X$ on avoin ja epätyhjä. Siispä löytyy sellainen $n_U \in \mathbb{N}$, että $a_{n_U} \in U$. Saadaan siis kuvaus $\alpha \colon \mathcal{U} \to \mathbb{N}$, $\alpha(U) = n_U$.

Näin saatu kuvaus α on *injektio*, sillä jos $U, V \in \mathcal{U}$ ja $U \neq V$, niin $U \cap V = \emptyset$. Tämä seuraa, sillä oletuksen nojalla $\mathcal{U}$ on pistevieras kokoelma. Siispä jos $a_{n_U} \neq a_{n_V}$, niin $n_U \neq n_V$, joten kuvaus α on injektio.

Tästä kuitenkin seuraisi, että $\mathcal{U}$ on numeroituva, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □