9. Dualiteetti

Jos E on vektoriavaruus, niin merkintä $E^* = L(E, \mathbb{K})$ tarkoittaa avaruuden E *algebrallista duaalia*. Duaalin E^* ovat avaruuden E lineaarisia muotoja. Jos $x' \in E^*$ ja $x \in E$, niin usein merkitään $\langle\, x\,,\, x'\,\rangle$ funktiomerkinnän $x'(x)$ sijasta. Ehto $(x, x') \mapsto \langle\, x\,,\, x'\,\rangle$ määrittelee niin sanotun *kanonisen bilineaarimuodon* $E \times E^* \to \mathbb{K}$.

Normiavaruuden tapauksessa $x' \in E^*$ voi olla jatkuva tai epäjatkuva, joten tämän motivoimana määrittelemme.

9.1. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus, niin $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ on avaruuden E (*topologinen*) *duaali.*

Siis $E' = \{\, x' : \ x' \text{ on jatkuva lineaarikuvaus } E \to \mathbb{K} \,\}$ ja E' on avaruuden E^* vektorialiavaruus. Jos E on äärellisulotteinen, niin $E' = E^*$. Muussa tapauksessa $E' \neq E^*$. Jos $x' \in E'$, niin funktionaalin x' normi on Lauseen 6.1 sivulla 97 nojalla

$$\|\, x'\,\| = \sup_{\|\, x\,\| \le 1} |\langle\, x\,,\, x'\,\rangle|.$$

Siis $(E', \|\cdot\|)$ on normiavaruus saman Lauseen 6.1 nojalla.

9.2. **Lause.** *Jos E on normiavaruus, niin $(E', \|\cdot\|)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Väite seuraa suoraan Lauseesta 6.6, koska skalaarikunta $\mathbb{K}$ on täydellinen. □

9.3. **Esimerkki.** Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = p/(p-1)$, eli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

joten p ja q ovat *duaalieksponentteja* (katso luku 2, Määritelmän 2.13 sivulla 14 jälkeinen teksti). Näytämme, että avaruuden $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ duaali on isomorfinen avaruuden $(\ell^q, \|\cdot\|_q)$ kanssa. Merkitään

$$e_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ kpl.}}, 1, 0, \dots) \in \ell^p,$$

kun $k \in \mathbb{N}$, ja

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

kun $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \|\, x - s_n(x)\,\|_p = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p \Big)^{1/p} = 0,$$

eli

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Jos $x' \in (\ell^p)'$, $x \in \ell^p$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\langle\, s_n(x)\,,\, x'\,\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \langle\, e_k\,,\, x'\,\rangle =: \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Koska $\lim s_n(x) = x$ ja x' on jatkuva, niin $\lim\langle\, s_n(x)\,,\, x'\,\rangle = \langle\, x\,,\, x'\,\rangle$, siis

$$\langle\, x\,,\, x'\,\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k. \tag{9.4}$$

Näytämme, että $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Merkitään

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{|y_k|^q}{y_k}, & \text{kun } y_k \neq 0, \\ 0, & \text{kun } y_k = 0, \end{cases}$$

ja asetetaan jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k \in \ell^p.$$

Tällöin

$$\|\, w_n \,\|_p^p = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k|^p = \sum_{k=0}^{n} |y_k|^{p(q-1)} = \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q.$$

Sijoitetaan kaavaan (9.4) muuttujan x paikalle w_n. Nyt

$$\begin{aligned} A := \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k y_k = \langle\, w_n\,,\, x'\,\rangle = |\langle\, w_n\,,\, x'\,\rangle| \le \|\, w_n \,\|_p \|\, x' \,\| \\ = \Big(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\Big)^{1/p} \|\, x' \,\| = A^{1/p} \|\, x' \,\| \end{aligned} \tag{9.5}$$

Kerrotaan yhtälö (9.5) puolittain luvulla $A^{-1/p}$, jolloin saadaan

$$A^{1-1/p} = A^{1/q} = \Big(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\Big)^{1/q} \le \|\, x' \,\|.$$

Siis $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^q$ ja $\|\, y \,\|_q \le \|\, x' \,\|$. Määrittelemme kuvauksen $T\colon (\ell^p)' \to \ell^q$ asettaen

$$Tx' = y,$$

missä siis $y = (y_k) = (\langle\, e_k\,,\, x'\,\rangle)$. Suoraan määritelmästä seuraa, että T on lineaarinen kuvaus, ja edellä totesimme, että

$$\|\, Tx' \,\|_q \le \|\, x' \,\|,$$

joten T on jatkuva. Jos $Tx' = \bar{0}$, niin $\langle\, e_k\,,\, x'\,\rangle = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, ja siis

$$\langle\, s_n(x)\,,\, x'\,\rangle = \sum_{k=0}^{n} x_k \langle\, e_k\,,\, x'\,\rangle = 0,$$

kaikilla $(x_k) \in \ell^p$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska x' on jatkuva ja $\lim s_n(x) = x$, niin päättelemme, että $\langle\, x\,,\, x'\,\rangle = 0$ jokaisella $x \in \ell^p$, joten $x' = \bar{0}$. Siispä T on injektio.

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $y = (y_k) \in \ell^q$, niin Hölderin epäyhtälön (Lause 2.17 sivulla 14) mukaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Tästä seuraa, että kuvaus $\Lambda_y \colon x \mapsto \sum x_k y_k$ on jatkuva lineaarinen kuvaus $\ell^p \to \mathbb{K}$, joten se on eräs duaaliavaruuden $(\ell^p)'$ alkio, ja sen normi

$$\|\, \Lambda_y \,\| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \|\, y \,\|_q.$$

Määritellään kuvaus $S\colon y \mapsto \Lambda_y$. Edellisen perusteella S on jatkuva lineaarinen kuvaus $S : \ell^q \to (\ell^p)'$, jolle $\|\, Sy \,\| \le \|\, y \,\|_q$ jokaisella $y \in \ell^q$.

Suoraan operaattorin S määritelmän nojalla $\langle\, e_k\,,\, Sy\,\rangle = y_k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$, joten

$$TSy = y \quad \text{kaikilla } y \in \ell^q.$$

Siis $T((\ell^p)') = \ell^q$ ja koska T jo edellä todettiin injektioksi, se on siis bijektio ja S on operaattorin T käänteiskuvaus.

Olkoon nyt $x' \in (\ell^p)'$ ja $y = Tx'$. Tällöin siis $Sy = x'$ ja

$$\|\, x' \,\| = \|\, Sy \,\| \le \|\, y \,\|_q = \|\, Tx' \,\|_q \le \|\, x' \,\|.$$

Tästä seuraa, että $\|\, Tx' \,\|_q = \|\, x' \,\|$ joten T on isometrinen isomorfismi $(\ell^p)' \to \ell^q$. Voimme siten samaistaa avaruudet $(\ell^p)'$ ja ℓ^q. Tämän takia usein merkitäänkin $q = p'$.

Koska p ja q ovat symmetrisessä asemassa keskenään, niin vastaavasti ℓ^p ja $(\ell^q)'$ voidaan samaistaa keskenään isometrisesti isomorfisina avaruuksina. Siispä

$$((\ell^p)')' = (\ell^p)'' \cong (\ell^q)' \cong \ell^p.$$

Tämä tulos ilmaistaan sanomalla, että ℓ^p on *refleksiivinen* avaruus, kun $1 < p < \infty$.

Jos $x = (x_k) \in \ell^p$ ja $x' = (y_k) \in \ell^q$, niin kanoninen bilineaarimuoto voidaan siis esittää muodossa (9.4):

$$\langle\, x \,,\, x' \,\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k.$$

Jos erityisesti $p = q = 2$, niin tarkasteltavana on Hilbertin vektoriavaruus ℓ^2. Tällöin on siis edellisen mukaan $(\ell^2)' \cong \ell^2$ ja kanoninen bilineaarimuoto voidaan tulkita sisätuloksi

$$\langle\, x \,,\, x' \,\rangle = (\, x \,|\, \overline{y} \,),$$

missä $\overline{y} = (\overline{y_k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Kuvaus $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\overline{y_k})_{k\in\mathbb{N}} = \overline{y}$ on tässä tapauksessa liittolineaarinen ja isometrinen bijektio $\ell^2 \to (\ell^2)'$. Tähän asiaa palatataa yleisemmissä puitteissa.

9.6. **Esimerkki.** Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, esimerkiksi avoin osajoukko ja μ Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Olkoon $1 < p < \infty$. Silloin avaruuden $L^p(\Omega)$ duaali on luonnollisella tavalla isometrisesti isomorfinen avaruuden $L^q(\Omega)$ kanssa, missä q on jälleen p:n duaalieksponentti. Tarkemmin sanoen jokaista $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ vastaa yksikäsitteinen $g \in L^q(\Omega)$, jolle

$$\langle\, f \,,\, \varphi \,\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\mu(dx), \quad \text{jokaisella } f \in L^p(\Omega).$$

Katso esimerkiksi W. Rudin: *Real and Complex analysis*, Theorem 6.16. Edelleen, $\|\, \varphi \,\| = \|\, g \,\|_q$. Tulos pätee myös tapauksessa $p = 1$ (jolloin $q = \infty$), mutta tulos ei ole voimassa, kun $p = \infty$.

Huomautettakoon vielä, että täysin edellisen kaltaisella päättelyllä voidaan osoittaa, että avaruuden ℓ^1 duaali $(\ell^1)'$ on isometrisesti isomorfinen avaruuden ℓ^∞ kanssa. Sen sijaan avaruuden ℓ^∞ duaali $(\ell^\infty)'$ *ei ole* isomorfinen avaruuden ℓ^1 kanssa. Itse asiassa duaalia $(\ell^\infty)'$ ei voida esittää minään jonoavaruutena, vaan sen "luonnollisen" esityksen muodostavat äärellisesti additiiviset joukkofunktiot $\mathrm{ba}\,(\mathbb{N})$ eli äärellisesti additiiviset mitat (kts. Köthe, Topologische Lineare Räume, §31)

Hilbertin avaruuden duaali

Olkoon E Hilbertin avaruus ja $x \in E$. Olkoon $f_x \colon E \to \mathbb{K}$ kuvaus

$$z \mapsto (\, z \,|\, x \,), \quad z \in E.$$

Välittömästi voimme todeta, että f_x on lineaarinen. Cauchy–Schwarzin epäyhtälön mukaan

$$|f_x(z)| = |(\, z \,|\, x|\,) \leq \|\, z \,\|\|\, x \,\|$$

jokaisella $z \in E$, joten f_x on jatkuva eli $f_x \in E'$.

9.7. **Lause** (Fréchet–Rieszin lause). *Jos E on Hilbertin avaruus ja $f_x(z) = (\, z \,|\, x \,)$, kun $x \in E$ ja $z \in E'$, niin kuvaus $\Lambda\colon x \mapsto f_x$ määrittelee liittolineaarisen ja isometrisen bijektion $E \to E'$.*

Todistus. Kuvauksen Λ liittolineaarisuus on ilmeinen. Koska

$$|f_x(z)| \le \|\, x \,\|\|\, z \,\|,$$

on $f_x \in E'$ ja $\|\, f_x \,\| \le \|\, x \,\|$. Toisaalta

$$\|\, x \,\|^2 = (\, x \,|\, x \,) = f_x(x) = |f_x(x)| \le \|\, f_x \,\|\|\, x \,\|,$$

joten $\|\, x \,\| \le \|\, f_x \,\|$ ja siis $\|\, f_x \,\| = \|\, x \,\|$, eli kuvaus Λ on isometria $E \to E'$.

Koska jokainen isometria on injektio, niin olemme jo osoittaneet, että kuvaus Λ on jatkuva lineaarinen injektio, joka on lisäksi isometria. Näytämme seuraavaksi, että Λ on surjektio $E \to E'$.

Olkoon siis $f \in E'$. Jos $f = \bar{0}$, niin $f(z) = (\, z \,|\, \bar{0} \,)$ jokaisella $z \in E$, eli $f = f_{\bar{0}}$. Olettakaamme siis, että $f \ne \bar{0}$. Merkitään

$$M = \operatorname{Ker}(f) = \{\, z \in E : \ f(z) = 0 \,\}.$$

Koska f on jatkuva ja yksiö $\{0\}$ on suljettu skalaarikunnassa $\mathbb{K}$, on $M = f^{-1}(\{0\})$ avaruuden E suljettu vektorialiavaruus.[14] Lauseen 4.26 sivulla 63 nojalla $E = M \oplus M^{\perp}$. Koska $f \ne \bar{0}$, on $M \ne E$, joten $M^{\perp} \ne \{\bar{0}\}$. Siispä löytyy sellainen $y \in M^{\perp}$, että $y \ne \bar{0}$.

Olkoon $z \in E$; tällöin

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0,$$

joten $f(z)y - f(y)z \in \operatorname{Ker}(f) = M$. Koska $y \in M^{\perp}$, niin tästä seuraa, että

$$(\, f(z)y - f(y)z \,|\, y \,) = f(z)(\, y \,|\, y \,) - f(y)(\, z \,|\, y \,) = 0.$$

Koska $y \ne 0$, niin $(\, y \,|\, y \,) = \|\, y \,\|^2 > 0$, joten edellisestä saadaan esitys

$$f(z) = \left(\, z \,\middle|\, \frac{\overline{f(y)}}{\|\, y \,\|^2} y \right) =: (\, z \,|\, x \,),$$

kun $z \in E$. Olemme siis osoittaneet, että $f(z) = (\, z \,|\, x \,) = f_x(z)$ jokaisella $z \in E$, joten $f = f_x$ ja siis kuvaus Λ on surjektio $E \to E'$. $\square$

Fréchet–Rieszin lauseen mukaan Hilbertin avaruuden E jokainen jatkuva lineaarimuoto voidaan esittää sisätulon avulla seuraavasti: $z \mapsto (\, z \,|\, x \,)$, missä

[14] kts. Topologia I, 15.2.

vektori$x \in E$ on yksikäsitteisesti määrätty ja kyseessä olevan lineaarimuodon normi on $\| x \|$. Kuvausta $x \mapsto f_x$ sanotaan usein *kanoniseksi kuvaukseksi* $E \to E'$.

Hahn–Banachin lause

Olkoon E Hilbertin avaruus, $M \subset E$ sen suljettu aliavaruus, F normiavaruus ja $T \in \mathscr{L}(M, F)$. Tällöin T voidaan jatkaa jatkuvana lineaarikuvauksena koko avaruuteen E, toisin sanoen löytyy sellainen $T_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, jolle $T_1 x = Tx$, kun $x \in M$ ja vieläpä $\| T_1 \| = \| T \|$. Tämä jatko saadaan käyttämällä ortoprojektiota $P_M \colon E \to M$ ja määritellään $T_1 := TP_M$. Jätämme lukijalle harjoitustehtäväksi näyttää, että T_1 on vaadittu jatko.

Jos E onkin vain Banachin avaruus, ei tälle *jatkamisongelmalle* aina ole ratkaisua ! Esimerkiksi, jos $M = c_0$ ja $E = \ell^\infty$, niin $M \subset E$ on avaruuden ℓ^∞ suljettu vektorialiavaruus. Valitaan edelleen $F = c_0$ ja $T \in \mathscr{L}(M, F)$ identtinen kuvaus. Kuitenkin tiedämme, että ei ole olemassa operaattoria $T_1 \in \mathscr{L}(E, F)$, jolle pätisi $T_1 x = Tx$ jokaisella $x \in M$!

Hahn–Banachin lause liittyy tähän jatkamisongelmaan. Sen seurauksena tiedetään, että E on Banachin avaruus ja F on *äärellisulotteinen*, niin tällöin jokainen $T \in \mathscr{L}(M, F)$ voidaan jatkaa jatkuvana lineaarisena operaattorina koko avaruuteen E.

Hahn–Banachin lause liittyy myös seuraavaan ongelmaan: jos E on normiavaruus ja $x, y \in E$, $x \neq y$, niin löytyykö sellainen duaalin E' alkio, että

$$\langle x \, , \, x' \rangle \neq \langle y \, , \, x' \rangle.$$

Siis tämä on eräänlainen *tunnistamisongelma*; kykenemmekö me erottamaan avaruuden pisteitä jatkuvilla lineaarisilla funktionaaleilla ? Yleisemmin, minkälaiset konveksit joukot voidaan "separoida" toisistaan duaalin E' alkioilla.

Hahn–Banachin lause antaa näihin ongelmiin vastauksen. Lause on hyvin syvällinen, sillä se on itse asiassa ekvivalentti Zornin lemman ja siten valinta-aksiomin kanssa.

Aloitamme todistuksen seuraavalla aputuloksella, jota voi ajatella eräänlaisena induktioaskeleena, sillä Zornin lemma on myös ekvivalentti ns. transfiniittisen induktion kanssa.

9.8**. Lemma.** *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{R}$. Olkoon $M \subset E$ aito vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarimuoto $M \to \mathbb{R}$, että $|f(u)| \leq p(u)$ aina, kun $u \in M$. Jos tällöin $z \in E \setminus M$ ja $M_1 = M \oplus span(z)$, niin on olemassa sellainen lineaarimuoto*

$f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$, että $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$ ja $|f_1(w)| \le p(w)$ kaikilla $w \in M_1$.

Todistus. Jos $x, y \in M$, niin

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= f(x-y) \le p(x-y) \le p(x+z) + p(-y-z) \\ &= p(x+z) + p(y+z). \end{aligned}$$

Siispä

$$-p(y+z) - f(y) \le p(x+z) - f(x),$$

aina, kun $x, y \in M$. Koska edellisen arvion oikea puoli ei riipu muuttujasta y, niin

$$\sup_{y \in M} (-p(y+z) - f(y)) \le p(x+z) - f(x)$$

ja edelleen, koska edellisen arvion vasen puoli ei riipu muuttujasta x, niin

$$\sup_{y \in M} (-p(y+z) - f(y)) \le \inf_{x \in M} (p(x+z) - f(x))$$

Tästä voimme päätellä, että on olemassa sellainen vakio $c \in \mathbb{R}$, että

$$-p(y+z) - f(y) \le c \le p(x+z) - f(x) \tag{9.9}$$

kaikilla $x, y \in M$.

Tämän vakion avulla saamme nyt laajennuksen määriteltyä avaruuteen M_1. Jos $w \in M_1 = M \oplus \operatorname{span}(z)$, niin $w = u + \lambda z$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ ovat yksikäsitteiset. Määritellään $f_1\colon M_1 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_1(w) = f_1(u + \lambda z) = f(u) + \lambda c,$$

missä c on epäyhtälöparissa (9.9) esiintyvä vakio. Tällöin $f_1 \in M_1^*$ ja $f_1(u) = f(u)$ jokaisella $u \in M$. Pyrimme osoittamaan, että $|f_1(w)| \le p(w)$. Tapaus $\lambda = 0$ on selvä, koska $|f| \le p$ aliavaruudessa M. Olkoon siis $\lambda \ne 0$. Epäyhtälöparista (9.9) seuraa, että

$$-p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u) \le c \le p(\lambda^{-1}u + z) - f(\lambda^{-1}u),$$

kun $u \in M$ ja siis

$$-\frac{1}{|\lambda|} p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda} f(u) \le c \le \frac{1}{|\lambda|} p(u + \lambda z) - \frac{1}{\lambda} f(u),$$

mikä on yhtäpitävä epäyhtälöparin

$$-\frac{1}{|\lambda|} p(w) \le c + \frac{1}{\lambda} f(u)) \le \frac{1}{|\lambda|} p(w) \tag{9.10}$$

kanssa. Koska

$$c + \frac{1}{\lambda} f(u) = \frac{1}{\lambda}(f(u) + \lambda c) = \frac{1}{\lambda} f_1(w),$$

niin havaitaan, että epäyhtälöpari (9.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$-\frac{1}{|\lambda|}p(w) \le \frac{1}{\lambda} f_1(w) \le \frac{1}{|\lambda|}p(w) \Longrightarrow |f_1(w)| \le p(w),$$

mikä osoittaa väitteen. □

Lemma 9.8 ilmaisee siis sen, että seminormin majoiroima vektorialiavaruuden lineaarimuoto voidaan jatkaa samanlaiseksi muodoksi yhtä dimensiota laajempaan avaruuteen. Seuraavaksi osoitetaan, että se voidaan jatkaa koko avaruuteen.

9.11. **Lause** (Hahn–Banach). *Olkoon E $\mathbb{R}$-vektoriavaruus, M sen vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarimuoto $M \to \mathbb{R}$, että $|f(u)| \le p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarimuoto $g\colon E \to \mathbb{R}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$ ja $|g(x)| \le p(x)$, kun $x \in E$.*

Todistus. Todistuksen alkuun tarvitsemme hieman merkintöjä. Kun $N_1 \subset N_2$ on kaksi avaruuden E vektorialiavaruutta, $h_1 \in L(N_1, \mathbb{R})$ ja $h_2 \in L(N_2, \mathbb{R})$, niin merkitsemme

$$h_1 \prec h_2 \iff h_2(x) = h_1(x), \text{ kun } x \in N_1.$$

Kun $N \supset M$ on avaruuden E vektorialiavaruus, niin asetamme

$$\mathscr{F}_N = \{\, h \in L(N, \mathbb{R}) : \ f \prec h, \text{ ja } |h(x)| \le p(x), \text{ kun } x \in N \,\}.$$

Tämän jälkeen merkitsemme vielä

$$\mathscr{F} = \bigcup \{\, \mathscr{F}_N : \ N \text{ on avaruuden } E \text{ aliavaruus ja } N \supset M \,\}.$$

Tällöin $f \in \mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$, joten $\mathscr{F} \ne \emptyset$. Edelleen havaitsemme, että $(\mathscr{F}, \prec)$ muodostaa osittain järjestetyn joukon.

Olkoon

$$\mathscr{G} = \{\, h_i \in \mathscr{F}_{N_i} : \ i \in \mathcal{I} \,\}$$

jokin joukon $\mathscr{F}$ täysin järjestetty osajoukko. Tämä tarkoittaa sitä, että jos $h, g \in \mathscr{G}$, niin $h \prec g$ tai $g \prec h$. Nyt yhdiste

$$N = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} N_i$$

on avaruuden E vektorialiavaruus, kuten helposti huomataan sen perusteella, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. Voimme määritellä lineaarimuodon $k \in L(N, \mathbb{R})$ asettamalla

$$k(x) = h_i(x), \qquad \text{kun } x \in N_i,$$

mikä on hyvin määritelty, sillä jos $x \in N_i \cap N_j$, niin tällöin $h_i(x) = h_j(x)$. Kuvauksen k lineaarisuus seuraa jälleen välittömästi siitä, että $\mathscr{G}$ on täysin järjestetty. Suoraan kuvauksen k määritelmän seuraa, että $k \in \mathscr{F}$ ja $h_i \prec k$ kaikilla $i \in \mathcal{I}$. Toisin sanoen k on joukon $\mathscr{G}$ yläraja. *Zornin lemman* (kts. Appendix tai Topologia II, luku 17) nojalla joukossa $\mathscr{F}$ on siten (ainakin yksi) maksimaalinen alkio $g\colon W \to \mathbb{R}$.

Jos $W \neq E$, niin on olemassa $z \in E \setminus W$ ja nyt Lemman 9.8 nojalla löytyy sellainen lineaarimuoto $g_1\colon W \oplus \operatorname{span}(z) = W_1 \to \mathbb{R}$, että $g(x) = g_1(x)$ kun $x \in W$ ja lisäksi $|g(x)| \leq p(x)$ kaikilla $x \in W_1$. Todistuksen merkintöjen mukaan tämä tarkoittaa, että $g_1 \in \mathscr{F}_{W_1}$ ja $g \prec g_1$. Siispä $g_1 \in \mathscr{F}$, mutta $g \neq g_1$, joten g ei olisikaan maksimaalinen alkio. Näin ollen on välttämättä $W = E$ ja g on siten etsitty lineaarinen muoto $E \to \mathbb{R}$. $\square$

Lauseen 9.11 perustyyppi on ensimmäisen kerran esiintynyt (hieman rajoitetummassa muodossa) eräässä Hahnin julkaisussa vuonna 1927, ja hiukan Lausetta 9.11 yleisemmässä muodossa Stefan Banachilla vuodelta 1929. Näissä on oleellista se, että E on reaalinen vektoriavaruus. Tämän lauseen yleistivät kompleksiseen avaruuteen vuonna 1938 samanaikaisesti Yhdysvalloissa Bohnenblust ja Sobczyk, sekä Neuvostoliitossa Suhomlinov.

Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus. Koska $\mathbb{R}$ voidaan tulkita kompleksilukujen $\mathbb{C}$ alikunnaksi, on tulo λx määritelty, kun $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $x \in E$, joten E voidaan luonnollisella tavalla varustaa myös $\mathbb{R}$-vektoriavaruuden struktuurilla. Merkitsemme E_r:llä avaruutta E tulkittuna reaaliseksi vektoriavaruudeksi.

Olkoon f lineaarimuoto $E \to \mathbb{C}$, eli $f \in E^*$. Merkitsemme

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x),$$

kun $x \in E$ ja missä $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{R}$ ja edelleen

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + \overline{f}), \quad g_2 = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}).$$

Siispä f_1, f_2 ovat $\mathbb{R}$-lineaarisia muotoja $E_r \to \mathbb{R}$. Koska $f(ix) = if(x)$, kun $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix) = i(f_1(x) + i f_2(x)) = i f_1(x) - f_2(x).$$

Tästä seuraa, että

$$f_1(ix) = \operatorname{Re}(f(ix)) = \operatorname{Re}(i f_1(x) - f_2(x)) = -f_2(x),$$

eli $f_2(x) = -f_1(ix)$, joten saamme esityksen

$$f(x) = f_1(x) - i f_1(ix), \tag{9.12}$$

kun $x \in E$.

Kääntäen, jos f_1 on lineaarimuoto $E_r \to \mathbb{R}$ ja asetamme

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix),$$

kun $x \in E$. Siis f on kuvaus $E \to \mathbb{C}$. Koska $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$, niin välittömästi toteamme kuvauksen f määritelmän nojalla, että $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Jos $x \in E$, niin

$$f(ix) = f_1(ix) - if_1(-x) = f_1(ix) + if_1(x) = i(f_1(x) - if_1(ix) = if(x).$$

Olkoon nyt $c = a + ib \in \mathbb{C}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, ja olkoon $x \in E$. Edellä tehtyjen havaintojen nojalla on tällöin

$$f(cx) = f((a+ib)x) = f(ax)+f(ibx) = af(x)+if(bx) = (a+ib)f(x) = cf(x).$$

Siis f on lineaarimuoto $E \to \mathbb{C}$.

Olemme siten todistaneet, että algebrallisen duaalin E^* alkiot ovat täsmälleen ne kuvaukset $f \colon E \to \mathbb{C}$, jotka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix),$$

missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarimuoto $E_r \to \mathbb{R}$.

Tämän avulla voimme nyt osoittaa kompleksisen version Hahn–Banachin lauseesta.

9.13. **Lause** (Bohnenblust–Sobczyk–Suhomlinov). *Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$, missä $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Olkoon M avaruuden E vektorialiavaruus, p seminormi avaruudessa E ja f sellainen lineaarimuoto $M \to \mathbb{K}$, että $|f(u)| \le p(u)$, kun $u \in M$. Tällöin on olemassa sellainen lineaarimuoto $g \colon E \to \mathbb{K}$, että $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$, ja $|g(x)| \le p(s)$ kaikilla $x \in E$.*

Todistus. Tapaus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on sama kuin Lause 9.11. Olkoon $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Tällöin

$$f(u) = f_1(u) - if_1(iu), \tag{9.14}$$

kun $u \in M$, missä f_1 on $\mathbb{R}$-lineaarimuoto $M_r \to \mathbb{R}$. Koska

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)}),$$

niin

$$|f_1(x)| = \frac{1}{2}|f(x) + \overline{f(x)}| \le \frac{1}{2}(|f(x)| + |\overline{f(x)}|) = |f(x)|,$$

ja siis $|f(x)| \le p(x)$, kun $x \in M$.

Hahn–Banachin lauseen 9.11 nojalla on siis olemassa sellainen $\mathbb{R}$-lineaarinen muoto $g_1 \colon E \to \mathbb{R}$, että $g_1(u) = f_1(u)$, kun $u \in M$, ja $|g_1(x)| \le p(x)$ kaikilla $x \in E_r$. Asetamme:

$$g(x) = g_1(x) - ig_1(ix), \tag{9.15}$$

kun $x \in E$. Tällöin g on lineaarimuoto $E \to \mathbb{C}$ ja $g(u) = f(u)$, kun $u \in M$. Vielä on osoitettava, että $|g(x)| \le p(x)$ jokaisella $x \in E$.

Olkoon $x \in E$. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda \in \mathbb{C}$, että $|\lambda| = 1$ ja

$$g(x) = \lambda^{-1}|g(x)|$$

Tällöin $g(\lambda x) = \lambda g(x) = |g(x)| \in \mathbb{R}$, joten kuvauksen g määritelmän (9.15) nojalla on siis

$$g(\lambda x) = g_1(\lambda x).$$

Koska $|\lambda| = 1$, niin suoraan laskemalla saamme nyt, että

$$|g(x)| = |\lambda|\,|g(x)| = |\lambda g(x)| = |g(\lambda x)| = |g_1(\lambda x)| \le p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x).$$

Näin ollen g täyttää vaaditut ehdot. □

9.16. *Huomautus.* Myös Lausetta 9.13 sanotaan usein *Hahn–Banachin* lauseeksi, samoin kuin esimerkiksi seuraavaa lausetta, jota voidaan pitää Lauseen 9.13 seurauslauseena.

Seuraavaksi sovellamme edellä olleita lauseita erilaisten *jatkuvien* lineaaristen funktionaalien rakentamiseen normiavaruuksissa tai Banachin avaruuksissa.

9.17. **Lause.** *Olkoon E normiavaruus, M sen vektorialiavaruus ja $u' \in M'$. Tällöin on olemassa sellainen $x' \in E'$, että $\langle u, x' \rangle = \langle u, u' \rangle$, kun $u \in M$, ja $\| x' \| = \| u' \|$.*

Todistus. Määritellään seminormi p avaruudessa E asettamalla

$$p(x) = \| x \| \, \| u' \|,$$

kun $x \in E$. Tällöin

$$|\langle u, u' \rangle| \le \| u \| \, \| u' \| = p(u),$$

kun $u \in M$ ja siis Lauseen 9.13 nojalla on olemassa sellainen $x' \in E^*$, että $\langle u, x' \rangle = \langle u, u' \rangle$, kun $u \in M$ ja

$$|\langle x, x' \rangle| \le p(x) = \| x \| \, \| u' \|$$

kaikilla $x \in E$. Siispä x' on jatkuva eli $x' \in E'$, ja $\| x' \| \le \| u' \|$. Toisaalta,

$$\begin{aligned} \| u' \| &= \sup\{ |\langle u, u' \rangle| : \ \| u \| \le 1, \ u \in M \} \\ &= \sup\{ |\langle u, x' \rangle| : \ \| u \| \le 1, \ u \in M \} \\ &\le \sup\{ |\langle x, x' \rangle| : \ \| x \| \le 1, \ x \in E \} = \| x' \|, \end{aligned}$$

joten $\| x' \| = \| u' \|$. □

Lauseen 9.17 mukaan siis normiavaruuden vektorialiavaruuden jatkuva lineaarimuoto voidaan jatkaa koko avaruuden jatkuvaksi lineaarimuodoksi siten, että sen normi säilyy muuttumattomana (mikä on erityisen hyödyllistä).

9.18. **Lause.** *Olkoon M normiavaruuden E vektorialiavaruus, $x_0 \in E$ ja $d = \operatorname{dist}(x_0, M) > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $x' \in E'$, että $x'(M) = \{0\}$, $\langle x_0 , x' \rangle = d$ ja $\| x' \| = 1$.*

Todistus. Merkitään $W = M \oplus \operatorname{span}(x_0)$. Jos $z \in W$, niin $z = u + \lambda x_0$, missä $u \in M$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ ovat yksikäsitteisiä. Asetetaan $\langle z , z' \rangle = \lambda d$. Tällöin z' on lineaarinen muoto $W \to K$ eli $z' \in W^*$. Jos $\lambda = 0$, niin $\langle z , z' \rangle = 0$ kaikilla $z \in M$, joten siis $z'(M) = \{0\}$. Oletamme seuraavassa, että $\lambda \neq 0$. Tällöin

$$|\langle z , z' \rangle| = |\lambda d| \leq |\lambda| \Big\| \frac{u}{\lambda} + x_0 \Big\| = \| u + \lambda x_0 \| = \| z \|,$$

sillä $d \leq \| \lambda^{-1} u + x_0 \|$, koska $\lambda^{-1} u \in M$. Siispä $z' \in W'$ ja $\| z' \| \leq 1$.

Näytetään nyt, että $\| z' \| = 1$. Tätä varten valitaan $\varepsilon > 0$. Koska $d = \inf\{ \| x_0 - u \| : \ u \in M \}$, niin löytyy sellainen $u \in M$, että $\| x_0 - u \| < d + \varepsilon$. Nyt

$$|\langle x_0 - u , z' \rangle| = |\langle x_0 , z' \rangle| = d,$$

joten soveltamlla tietoa $\| (x_0 - u)/\| x_0 - u \| \| = 1$ saadaan

$$\begin{aligned} \| z' \| &= \sup\{ |\langle u , z' \rangle| : \ u \in W, \ \| u \| \leq 1 \} \geq \frac{|\langle x_0 - u , z' \rangle|}{\| x_0 - u \|} \\ &= \frac{d}{\| x_0 - u \|} > \frac{d}{d + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon}, \end{aligned}$$

mistä päättelemme, että $\| z' \| \geq 1$. Nyt voimme soveltaa Lausetta 9.17, joka takaa sellainen jatkuvan lineaarifunktionaalin $x' \in E'$ olemassaolon, jolle $\langle x , x' \rangle = \langle x , z' \rangle$, kun $x \in W$, ja $\| x' \| = \| z' \|$. Tällöin $x'(M) = \{0\}$, $\langle x_0 , x' \rangle = \langle x_0 , z' \rangle = d$ ja $\| x' \| = 1$. □

9.19. **Seuraus.** *Jos $x_0 \neq \bar{0}$ on normiavaruuden E vektori, niin on olemassa sellainen $x' \in E'$, että $\langle x_0 , x' \rangle = \| x_0 \|$ ja $\| x' \| = 1$.*

Todistus. Jos $M = \{\bar{0}\}$, niin $\operatorname{dist}(x_0, M) = \| x_0 \|$. Väite seuraa siten välittömästi Lauseesta 9.18. □

9.20. **Seuraus.** *Jos E on normiavaruus ja $x \in E$, niin*

$$\| x \| = \sup\{ |\langle x , x' \rangle| : \ x' \in E', \ \| x' \| \leq 1 \}.$$

Todistus. Jos $\| x' \| \leq 1$, niin

$$|\langle x , x' \rangle| \leq \| x \| \, \| x' \| \leq \| x \|,$$

joten

$$\sup_{\|x'\|\le 1} |\langle x\,,\, x'\rangle| \le \|x\|.$$

Jos $x = \bar{0}$, niin $\|x\| = 0 = \sup|\langle x\,,\, x'\rangle|$, joten oletamme, että $x \neq \bar{0}$. Nyt Seurauksen 9.19 nojalla on olemassa sellainen $x' \in E'$, että

$$|\langle x\,,\, x'\rangle| = \|x\| \quad \text{ja} \quad \|x'\| = 1,$$

joten $\|x\| \le \sup|\langle x\,,\, x'\rangle|$. □

9.21. **Seuraus.** *Jos E on normiavaruus ja $x \in E$ on sellainen vektori, että $\langle x\,,\, x'\rangle = 0$ kaikilla $x' \in E'$, niin $x = \bar{0}$.*

Todistus. Jos $\langle x\,,\, x'\rangle = 0$ kaikilla $x' \in E'$, niin Seurauksen 9.20 nojalla $\|x\| = 0$ ja siis $x = \bar{0}$. □

9.22. **Lause.** *Olkoon M normiavaruuden vektorialiavaruus. Tällöin M on tiheä avaruudessa E silloin ja vain silloin kun avaruudella M on seuraava ominaisuus: Jos $x' \in E'$ ja $x'(M) = \{0\}$, niin $x' = \bar{0}$.*

Todistus. HT 13/2006. □

Bilineaarimuodot ja Lax–Milgramin lause

Fréchet–Rieszin lauseen sovelluksena todistamme Lax–Milgramin lauseen, jota voi soveltaa differentiaaliyhtälöihin. Lause koskee Hilbertin avaruuksien bilineaarimuotoja.

9.23. **Määritelmä.** Olkoon E, F ja G vektoriavaruuksia. Sanomme, että kuvaus $B\colon E \times F \to G$ on bilineaarinen, jos $x \mapsto B(x,y)$ on lineaarinen jokaisella $y \in F$ ja $y \mapsto B(x,y)$ on lineaarinen jokaisella $x \in E$.

9.24. **Lause.** *Olkoon E, F ja G normiavaruuksia. Tällöin bilineaarinen kuvaus $B\colon E \times F \to G$ on jatkuva $\iff$ on olemassa sellainen $M < \infty$, että $\|B(x,y)\| \le M\|x\|\|y\|$ kaikilla $(x,y) \in E \times F$.*

Todistus. HT 13/2006. □

Fréchet–Rieszin lauseen avulla voimme nyt karakterisoida Hilbertin avaruuksien bilineaarimuodot eli bilineaarikuvaukset, joissa maaliavaruutena on $\mathbb{K}$.

9.25. **Seuraus.** *Olkoon E $\mathbb{R}$-kertoiminen Hilbertin avaruus ja $B\colon E \times E \to \mathbb{R}$ bilineaarinen ja jatkuva. Silloin on olemassa yksikäsitteinen $T \in \mathscr{L}(E)$, jolle*

$$B(x,y) = (\,x \mid Ty\,) \quad \textit{jokaisella } x, y \in E.$$

Todistus. Jos $y \in E$, niin kuvaus $B_y \colon x \mapsto B(x, y)$ on jatkuva ja lineaarinen, eli $B_y \in E'$. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on olemassa sellainen *yksikäsitteinen* alkio $T(y) \in E$, että

$$B(x, y) = (\, x \,|\, T(y) \,) \quad \text{jokaisella } x \in E.$$

Kuvaus $T \colon y \mapsto T(y)$ on lineaarinen (HT). Se on myös jatkuva, sillä

$$\| \, Ty \, \|^2 = (\, Ty \,|\, Ty \,) = B(y, Ty) \le M \| \, y \, \| \| \, Ty \, \|,$$

joten $\| \, Ty \, \| \le M \| \, y \, \|$ jokaisella $y \in E$. □

9.26. **Määritelmä.** Kun E on Hilbertin avaruus, niin sanomme, että bilineaarimuoto $B \colon E \times E \to \mathbb{R}$ on *koersiivinen*, jos löytyy sellainen $C > 0$, että $B(x, x) \ge C \| \, x \, \|^2$ jokaisella $x \in E$.

9.27. **Lause** (Lax–Milgram)**.** *Olkoon B jatkuva, koersiivinen bilineaarimuoto Hilbertin avaruudessa E. Jos $w \in E'$, niin on olemassa yksikäsitteinen $u \in E$, jolle*

$$B(x, u) = \langle \, x \, , \, w \, \rangle \quad \textit{jokaisella } x \in E. \tag{9.28}$$

Todistus. Olkoon $w \in E'$. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen $v \in E$, jolle $\langle \, x \, , \, w \, \rangle = (\, x \,|\, v \,)$ jokaisella $x \in E$. Seurauslauseen 9.25 mukaan voimme löytää operaattorin $T \in \mathscr{L}(E)$, jolle $B(x, y) = (\, x \,|\, Ty \,)$ jokaisella $x, y \in E$. Koska B on koersiivinen, niin T on bijektio. Valitaan $u = T^{-1} v$, jolloin $B(x, y) = (\, x \,|\, v \,) = \langle \, x \, , \, w \, \rangle$ kaikilla $x \in E$, joten ehto (9.28) on voimassa.

Jos myös u_1 toteuttaa ehdon (9.28), on alkion v yksikäsitteisyyden nojalla

$$B(x, u_1) = \langle \, x \, , \, w \, \rangle = (\, x \,|\, v \,) = (\, x \,|\, Tu \,)$$

jokaisella $x \in E$. Seurauslauseen (9.25) mukaan saamme, että $Tu = Tu_1$ ja koska T on bijektio, niin $u = u_1$. □

Sovellamme Lax–Milgramin lausetta seuraavan epähomogeeniseen Sturmin–Liouvillenongelmaan (vertaa luvun 5 käsittelyä)

$$\text{(SL')} \qquad \begin{cases} -(pu')' + qu = f, & \text{kun } x \in (0,1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$

missä $p \in C^1(0,1)$, $q \in C(0,1)$, $f \in L^2(0,1)$ ovat annettuja ja $p(x) \ge \alpha > 0$ ja $q(x) \ge 0$. Muistutamme, että $H_0^1(0,1) = \{ \; f \in H^1(0,1) : \; f(0) = f(1) = 0 \; \}$ on Sobolevin avaruuden $H^1(0,1)$ suljettu vektorialiavaruus. Tarvitsemme seuraavan aputuloksen

9.29. **Lemma** (Poincarén epäyhtälö). *On olemassa vakio $C > 0$, jolle*

$$\| f \|_{H^1(0,1)} \leq C \| f' \|_{L^2(0,1)}$$

kaikilla $f \in H_0^1(0,1)$.

Todistus. Jos $f \in H_0^1(0,1)$, niin Lauseen 5.21 sivulla 87 nojalla melkein kaikilla $x \in [0,1]$ on voimassa

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \Big| \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leq \| f' \|_{L^1(0,1)},$$

mistä seuraa, että $\| f \|_\infty \leq \| f' \|_1$. Hölderin epäyhtälön nojalla siis

$$\| f \|_2^2 \leq \| f \|_\infty \| f \|_1 \leq \| f' \|_1 \| f \|_2 \leq \| f' \|_2 \| f \|_2,$$

joten $\| f \|_2 \leq \| f' \|_2$. Siispä väite seuraa nyt avaruuden $H^1(0,1)$ normin määritelmästä. □

9.30. **Lause.** *Tehtävällä* (SL') *on yksikäsitteinen heikko ratkaisu $u \in H_0^1(0,1)$. Jos $f \in C(0,1)$, on $u \in C^2(0,1)$ ja se on tehtävän* (SL') *klassinen ratkaisu.*

Heikko ratkaisu tarkoittaa tässä funktiota $u \in H_0^1(0,1)$, jolle

$$\int_0^1 p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.31}$$

jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$.

Todistus. 1. Kuten luvussa 5 näemme, että jokainen tehtävän (SL') klassinen ratkaisu on myös heikko ratkaisu.

2. Määritellään Hilbertin avaruudessa $E := (H_0^1(0,1), \| \cdot \|_{H^1(0,1)})$ bilineaarimuoto

$$B(u,v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Koska $p, q \in C(0,1)$, niin $\| p \|_\infty, \| q \|_\infty \leq M$ jollakin $M < \infty$. Siispä Hölderin epäyhtälön avulla saamme

$$|B(u,v)| \leq M \int_0^1 |u'(x)v'(x)| + |u(x)v(x)|\,\mathrm{d}x \leq C \| u \|_{H^1} \| v \|_{H^1},$$

joten B on jatkuva. Poincarén epäyhtälön seurauksena B on myös koersiivinen, sillä

$$\begin{aligned} \| u \|_{H^1}^2 \leq C \| u' \|_{L^2}^2 &= C \int_0^1 u'(x)^2\,\mathrm{d}x \leq C\alpha^{-1} \int_0^1 p(x)u'(x)^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq C\alpha^{-1} \int_0^1 p(x)u'(x)^2 + q(x)u(x)^2\,\mathrm{d}x = C\alpha^{-1} B(u,u). \end{aligned}$$

Edellä käytimme hyväksi oletusta $p(x) \geq \alpha$ ja $q(x) \geq 0$.

3. Löydämme tehtävän (SL') heikon ratkaisun nyt seuraavasti: Koska $f \in L^2(0,1)$ on lineaarikuvaus
$$w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x) f(x)$$
jatkuva $E \to \mathbb{R}$, joten $w \in E'$. Lax–Milgramin lauseen nojalla (sillä B toteuttaa Lax–Milgramin lauseen ehdot) löydämme yksikäsitteisen funktion $u \in E$, jolle
$$B(\varphi, u) = \int_0^1 p(x)\varphi'(x)u'(x) + q(x)\varphi(x)v(x)\,\mathrm{d}x = w(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)f(x)$$
jokaisella $\varphi \in E$. Määritelmän (9.31) nojalla tämä on tehtävän (SL') yksikäsitteinen heikko ratkaisu (sillä $\mathscr{D}(0,1) \subset E$).
4. Kuten luvussa 5, voimme osoittaa, että $u \in C^2(0,1)$ jos $f \in C(0,1)$.

$\square$

Huomautamme vielä, että yleisempi tehtävä
$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f, & \text{kun } x \in (0,1) \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases}$$
missä p, q ja f ovat kuten edellä ja $r \in C(0,1)$, palautuu tehtävään (SL') kertomalla ylempi yhtälö funktiolla
$$\zeta(x) = \exp\Big(- \int^x \frac{r(t)}{p(t)}\,\mathrm{d}t\Big)$$
ja käyttämällä identiteettiä $\zeta' p + \zeta r = 0$. (Katso Brezis, VIII. 4, mistä löytyy myös muita Lax–Milgramin lauseen sovelluksia).

Biduaali

9.32. **Määritelmä.** Jos E on normiavaruus, niin $E'' := (E')'$ on avaruuden E *biduaali.*

Tiedämme jo, että normiavaruuden E biduaali on aina Banachin avaruus. Olkoon $x \in E$ kiinteä ja tarkastellaan sen määräämää kuvausta $J_x \colon E' \to \mathbb{K}$,
$$J_x x' = \langle\, x \,,\, x' \,\rangle.$$
Havaitsemme, että $J_x \in (E')'$: kuvaus J_x on lineaarinen, sillä
$$J_x(x' + \alpha y') = \langle\, x \,,\, x' + \alpha y' \,\rangle = \langle\, x \,,\, x' \,\rangle + \alpha \langle\, x \,,\, y' \,\rangle = J_x(x') + \alpha J_x(y'),$$
kun $x', y' \in E'$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Edelleen
$$|J_x(x')| = |\langle\, x \,,\, x' \,\rangle| \le \|\, x \,\| \|\, x' \,\|,$$
joten J_x on myös jatkuva.

Siispä jokaisella $x \in E$, on kuvaus $J_x \in E''$, joka siis riippuu vektorista x. Merkitsemme näin muodostunutta kuvausta $J\colon E \to E''$, $Jx = J_x$. Kuvauksen J määrittelee siis ehto

$$\langle x' , Jx \rangle = \langle x , x' \rangle,$$

kun $x \in E$ ja $x' \in E'$. Sanomme, että J on *kanoninen kuvaus* $E \to E''$.

9.33. **Lause.** *Jos E on normiavaruus, niin kanoninen kuvaus $J\colon E \to E''$ on lineaarinen isometria.*

Todistus. HT 13/2006. □

Koska E'' on Banachin avaruus, niin lauseen 9.33 mukaan $J(E) \subset E''$ on vektorialiavaruus, joka on isometrisesti isomorfinen avaruuden E kanssa. Nyt jos E on Banachin avaruus, niin $J(E)$ on suljettu. Jos E ei ole täydellinen, ei myöskään $J(E)$ ole suljettu. Kuitenkin voimme puhua vektorialiavaruuden $J(E)$ sulkeumasta avaruudessa E''. Sanommekin, että Banachin avaruus $\overline{J(E)}$ on avaruuden E *täydentymä* ja merkitsemme $\widehat{E} := \overline{J(E)}$.

Jokaiselle normiavaruudelle E siis löytyy Banachin avaruus F (esimerkiksi $F = \widehat{E}$) ja sellainen lineaarinen isometria $T\colon E \to F$, että $T(E) \subset F$ on tiheä. Voidaan myös osoittaa, että jokainen tällainen F on itse asiassa lineaarisesti isometrinen täydentymän $\widehat{E}$ kanssa.

9.34. **Määritelmä.** Normiavaruus E on *refleksiivinen*, jos $J(E) = E''$.

Koska E'' on aina Banachin avaruus, niin välttämätön ehto refleksiivisyydelle on, että E on Banachin avaruus. Jos E on refleksiivinen, niin E ja E' ovat toisiinsa nähden symmetrisessä asemassa.

9.35. **Esimerkki.** a) Jokainen äärellisulotteinen normiavaruus on refleksiivinen: tällöin on nimittäin $E' = E^*$ ja siis $\dim(E) = \dim(E') = \dim(E'')$, joten J on bijektio.

b) Jos $1 < p < \infty$, niin ℓ^p on refleksiivinen: $(\ell^p)' =$ ‘, missä q on p:n duaalieksponentti ($1/p + 1/q = 1$), ja

$$\langle x , y' \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k y_k,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p$, $y' = (y_l) \in$ ‘.

c) Vastaavasti, jos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen, voidaan osoittaa, että $L^p(\Omega)' = L^q(\Omega)$. Dualiteetilla on luonnollinen esitys

$$\langle f , g \rangle = \int_\Omega f(t)g(t)d\mu$$

missä $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$.

d) Seuraavat avaruudet eivät ole refleksiivisiä: c_0, c, ℓ^1, ℓ^∞, $C(0,1)$, $L^1(\Omega)$ ja $L^\infty(\Omega)$.

e) Olkoon E Hilbertin avaruus, $x \in E$ ja $z \in E$. Jos merkitsemme $f_x(z) = (\, z \,|\, x\,)$, niin Fréchet–Rieszin lauseen mukaan kuvaus $x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen ja isometrinen bijektio $E \to E'$. Tästä seuraa, että kanoninen kuvaus $J\colon E \to E''$ on bijektio ja siis jokainen Hilbertin avaruus on refleksiivinen. Separoituvan avaruuden tapauksessa tämä tulos sisältyy jo esimerkkiin b).

f) Jos E on refleksiivinen avaruus ja M on avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin M on refleksiivinen (Pettisin lause; kts. esim. Taylor, s. 192)

Refleksiivisyys on yhteydessä Banachin avaruuden geometrian esim. Milmanin lauseen muodossa: Jokainen tasaisesti konveksi Banachin avaruus on refleksiivinen.