8. Avoimen kuvauksen lause

Palautamme aluksi mieleen Topologian kursseilta ehkä tutut perusasiat yleisestä avoimen kuvauksen käsitteestä. Määrittelemme ensin avoimen kuvauksen pisteittäin.

8.1. **Määritelmä.** Olkoon X ja Y ovat topologia avaruuksia, $f\colon X \to Y$ kuvaus sekä $a \in X$. Tällöin sanomme, että f on *avoin pisteessä* a, jos $f(U)$ on pisteen $f(a)$ ympäristö aina, kun U on pisteen a ympäristö[13].

8.2. **Esimerkki.** a) Jos X ja Y ovat metrisiä avaruuksia, niin f on avoin pisteessä a joss jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että

$$B(f(a), r') \subset f(B(a, r)).$$

b) Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ei ole avoin nollassa, sillä $f(-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$, mikä ei ole pisteen $0 = f(0)$ ympäristö.

c) Projektio $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$, on avoin jokaisessa tason $\mathbb{R}^2$ pisteessä.

d) Kuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$, ei ole avoin missään pisteessä; itse asiassa $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \{0\}$ ei sisällä yhtään avointa joukkoa.

e) Olkoon $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$, missä τ_1 on tavallinen euklidinen topologia ja $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$, missä τ_2 on diskreetti topologia. Tällöin identtinen kuvaus $\mathrm{id} : X \to Y$ on avoin jokaisessa $\mathbb{R}$:n pisteessä.

Kuten jatkuvien kuvausten tapauksessa, avoimet kuvauksetkin voidaan määritellä globaalisti. Esitämmekin seuraavaksi globaalin määritelmän avoimelle kuvaukselle, joka liittyy läheisesti pisteittäiseen määritelmään kuten pian huomaamme.

8.3. **Määritelmä.** Jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia, niin kuvaus $f\colon X \to Y$ on *avoin*, jos $f(U)$ on avoin avaruudessa Y aina, kun U on avoin avaruudessa X.

Nyt voimmekin välittömästi yhdistää nämä kaksi käsitettä. On hyvä huomata, että tulos on täysin analoginen vastaavan yhteyden pisteittäisen ja globaalin jatkuvuuden kanssa.

8.4. **Lause.** *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on avoin jos ja vain jos f on avoin jokaisessa pisteessä $a \in X$.*

Todistus.

"$\Rightarrow$" Oletetaan, että f on avoin, ja olkoon $x \in X$ ja V on pisteen x ympäristö. Tällöin löytyy sellainen avoin joukko U, että $x \in U \subset V$, joten oletuksen

[13] tulkitsemme tässä, että V on pisteen x ympäristö, jos löytyy sellainen avoin joukko U, että $x \in U \subset V$

nojalla $f(U)$ on avoin ja koska $f(x) \in f(U) \subset f(V)$, niin $f(V)$ on pisteen $f(x)$ ympäristö.

"$\Leftarrow$" Kääntäen, jos $U \subset X$ on avoin ja $x \in U$ sen mielivaltainen piste, niin $f(U)$ on pisteen $f(x)$ ympäristö. Siispä löytyy sellainen avoin joukko $V \subset Y$, että $f(x) \in V \subset f(U)$. Erityisesti siis $f(x)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Koska tämä on voimassa jokaisella $x \in U$, niin jokainen piste $f(x) \in f(U)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Siispä $f(U)$ on avoin. $\square$

8.5. *Huomautus.* Jatkuva kuvaus ei aina ole avoin, kuten Esimerkin 8.2 kohta b) osoittaa. Myöskään avoin kuvaus ei ole aina jatkuva; katso saman Esimerkin 8.2 kohta e).

Kuinka avoimen kuvauksen käsite toimii lineaaristen kuvausten yhteydessä? Seuraava tulos näyttää, että lineaarisille kuvauksille avoimuus jo yhdessä pisteessä takaa avoimuuden joka pisteessä. (Vrt. Lause 2.26 sivulla 22)

8.6. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarinen. Tällöin T on avoin kuvaus jos ja vain jos T on avoin pisteessä $\bar{0}$.*

Todistus.

"$\Rightarrow$" Tämä suunta seuraa suoraan Lauseesta 8.4.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Olkoon $x \in E$ ja $r > 0$. Silloin löytyy sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$. Täten

$$T(B(x,r)) = T(x + B(\bar{0}, r)) = Tx + T(B(\bar{0}, r)) \supset Tx + B(\bar{0}, r') = B(Tx, r'),$$

eli T on avoin myös pisteessä x. Lauseen 8.4 nojalla T on avoin. $\square$

Havaitsemme, että jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ on avoin lineaarikuvaus, niin T on surjektio. (HT 11/2006). Tämä havainto tarkoittaa, että topologinen lisäoletus (avoimuus) implikoi algebrallisen tiedon (surjektiivisuus).

Tavoitteenamme on nyt osoittaa, että *Banachin* avaruuksien jatkuville lineaarikuvauksille T myös kääteinen väite pätee: surjektiivisuudesta (joka on pelkkä "algebrallinen" ehto) seuraa, että T on avoin (joka on topologinen ehto!)

Ennen kuin todistamme tämän väitteen, muotoilemme tuloksen tarkasti. Seuraava lause on peräisin *Stefan Banachilta* (1892 – 1945).

8.7. **Lause** (Avoimen kuvauksen lause)**.** *Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio, niin silloin T on avoin kuvaus.*

Kuten tasaisen rajoituksen periaatteen kanssa, ennen kuin ryhdymme todistamaan väitettä, tarkastelemme hieman väitteen seurauksia.

8.8. **Seuraus.** *Jos T on jatkuva lineaarinen bijektio Banachin avaruudesta E Banachin avaruuteen F, niin T on homeomorfismi.*

Todistus. Lauseen 8.7 nojalla T on avoin kuvaus, joten $T(U)$ on avoin avaruudessa F aina, kun U on avoin avaruudessa E. Jos $V \subset F$ on avoin, niin $T^{-1}(V)$ on avoin, koska T on oletuksen mukaan jatkuva. Siis T on homeomorfismi. (Kts. Topologia I, 12.2) $\square$

8.9. **Esimerkki.** Olkoot $x \mapsto \| x \|_1$ ja $x \mapsto \| x \|_2$ normeja vektoriavaruudessa E ja $\| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1$ kaikilla $x \in E$, missä $\beta > 0$. Tällöin identtinen kuvaus $(E, \| \cdot \|_1) \to (E, \| \cdot \|_2)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Jos sekä $(E, \| \cdot \|_1)$ että $(E, \| \cdot \|_2)$ ovat Banachin avaruuksia, niin identtinen kuvaus on Lauseen 8.7 nojalla homeomorfismi, joten normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_2$ ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen on olemassa sellainen $\alpha > 0$, että

$$\alpha \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1,$$

kun $x \in E$. (Katso Lause 2.10 sivulla 12).

Erikoistapauksena tarkastelemme avaruudessa $C = C([0,1], \mathbb{R})$ normeja

$$x \mapsto \| x \|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, \quad x \mapsto \| x \|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\| x \|_1 \leq \| x \|_\infty$, kun $x \in C$, joten identtinen kuvaus id $: (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Mutta tiedämme, että normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja. Voidaan siis päätellä, että

1. identtinen kuvaus id $: (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ ei ole avoin kuvaus, sillä se on jatkuva, mutta ei homeomorfismi. Siispä täydellisyys on olennainen avoimen kuvauksen lauseessa.
2. Tästä nähdään myös, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus, sillä muuten avoimen kuvauksen lauseen nojalla id $: (C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ olisi homeomorfismi.

Toinen konkreettisempi tapa nähdä, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus on käytää Lemmaa 5.6, jonka nojalla $(C, \| \cdot \|_1)$ on tiheä Banachin avaruudessa $L^1(0,1)$. Jos $(C, \| \cdot \|_1)$ olisi Banachin avaruus, niin se olisi Lauseen 3.13 sivulla 29 nojalla suljettu avaruudessa $L^1(0,1)$, mutta tiheyden nojalla tällöin olisi $C(0,1) = L^1(0,1)$, mikä osoittaa ristiriidan.

Nyt olemme valmiita aloittamaan avoimen kuvauksen lauseen todistamisen. Tarvitsemme ensin tärkeän aputuloksen, jonka todistamiseen tarvitsemme Bairen lausetta. Ennen kuin ryhdymme tämän apulauseen todistukseen, toteamme, että $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$, aina kun A ja B ovat normiavaruuden E osajoukkoja.

Tämän havaitsemiseen valitsemme $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $x_0 \in A$ ja $y_0 \in B$, että

$$\| x - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \| y - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

joten

$$\| (x + y) - (x_0 + y_0) \| \leq \| x - x_0 \| + \| y - y_0 \| < \varepsilon.$$

Siispä $x + y \in \overline{A + B}$. Huomattakoon, että sisältyvyys voi olla aito (Harjoitustehtävä).

8.10. **Lemma.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus ja T lineaarinen surjektio $E \to F$. Jos V on jokin pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö avaruudessa E, niin $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F.*

Todistus. Koska V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö, on olemassa sellainen $B = B(\bar{0}, r)$, että $B + B \subset V$.

Jos $y \in F$, niin $y = Tx$ jollakin $x \in E$, koska oletimme, että T on surjektio. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $\| x \| < nr$, eli $x \in nB$. Siis

$$y \in T(nB) = nT(B) \subset n\overline{T(B)}.$$

Koska $y \in F$ on mielivaltainen, olemme siis osoittaneet, että

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Tässä $n\overline{T(B)} = \overline{nT(B)}$, sillä kuvaus $x \mapsto nx$ on homeomorfismi $F \to F$. Koska F on Banachin avaruus, voimme soveltaa Bairen lausetta, Seurauksen 7.2 muodossa: Siis ainakin yksi suljetuista joukoista $n\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitsemme jatkossa selvyyden vuoksi avaruuden F palloja notaatiolla B_F.

Jos nyt $B_F(x_0, \rho_0) \subset n\overline{TB}$, niin

$$B_F(\frac{x_0}{n}, \frac{\rho_0}{n}) = \frac{1}{n} B_F(x_0, \rho_0) \subset \overline{T(B)},$$

eli myös joukko $\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitään $x = \frac{1}{n}x_0$ ja $\rho = \rho_0/n$, jolloin siis

$$B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)}.$$

Lisäksi pätee, että $-x \in \overline{T(B)}$. Nimittäin jos $x \in \overline{T(B)}$, niin löytyy sellainen approksimoiva jono $(y_n) \subset T(B)$, että $x = \lim y_n$. Nyt

$$y_n \in T(B) = T(B(\bar{0}, r)) \Longrightarrow -y_n \in T(B) \Longrightarrow -x = \lim(-y_n) \in \overline{T(B)}.$$

Tämän avulla saamme, että

$$\begin{aligned} B_F(\bar{0}, \rho) &= -x + B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)} + \overline{T(B)} \subset \overline{T(B) + T(B)} \\ &= \overline{T(B + B)} \subset \overline{T(V)}. \end{aligned}$$

Siis $\overline{T(V)}$ on $\bar{0} \in F$ ympäristöavaruudessa F. □

Avoimen kuvauksen lauseen todistus: Osoitamme, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Huomautamme, että Lemma 8.10 osoittaa melkein tämän, kunhan vain voisimme korvata joukon $\overline{T(V)}$ joukolla $T(V)$. Todistus perustuukin tämän osoittamiseen.

Olkoon $r > 0$, $r_0 = \frac{1}{2}r$ ja $r_k = 2^{-k}r_0$, kun $k \in \mathbb{N}$. Siis $r_k > 0$ ja

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Lemman 8.10 nojalla löydämme luvut $s_k > 0$, joille

$$B_F(\bar{0}, s_k) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jos $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}$, niin $\| y \| \leq \| T \| r_k \to 0$ ja siksi

$$\lim_{k\to\infty} s_k = 0.$$

Väitämme, että $B_F(\bar{0}, s_0) \subset T(B_E(\bar{0}, r))$. Tätä varten olkoon $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$. Siispä $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_0))}$. Löytyy siis $x_0 \in B_E(\bar{0}, r_0)$, jolle

$$\| y - Tx_0 \| < s_1$$

eli $y - Tx_0 \in B_F(\bar{0}, s_1) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_1))}$. Vastaavasti jatkamalla havaitsemme, että on olemassa sellainen $x_1 \in B_E(\bar{0}, r_1)$, että

$$\| y - Tx_0 - Tx_1 \| < s2,$$

eli $(y - Tx_0 - Tx_1) \in B_F(\bar{0}, s_2) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}$.
Induktioaskel: jos $x_k \in B_E(\bar{0}, r_k)$, $0 \leq k \leq n-1$, ja

$$y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \in B_F(\bar{0}, s_n) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_n))},$$

niin on olemassa sellainen $x_n \in B_E(\bar{0}, r_n)$, että

$$\| y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k \| < s_{n+1}.$$

Saamme siten konstruoitua jonon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa E, jolle $\| x_k \| < r_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < \sum_{k=0}^{\infty} r_k = 2r_0 = r < \infty,$$

eli sarja $\sum x_k$ on normisuppeneva avaruudessa E. Koska oletimme, että E on täydellinen, niin Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla tiedämme, että sarja $\sum x_k$ suppenee avaruudessa E. Merkitsemme tätä rajaa

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Tällöin

$$\| x \| \le \sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k = 2r_0 = r,$$

joten $x \in B_E(\bar{0}, r)$. Koska edelleen

$$\Big\| y - T \sum_{k=0}^{n} x_k \Big\| = \Big\| y - \sum_{k=0}^{n} T x_k \Big\| < s_{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$, niin

$$y = \lim_{n\to\infty} T\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k \Big) = T\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \Big) = Tx.$$

Olemme siis osoittanee seuraavan: Jos $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$, niin $y = Tx$, missä $x \in E$ ja $\| x \| < r$. Toisin sanoen, $T(B_E(\bar{0}, r)) \supset B_F(\bar{0}, s_0)$. Koska $r > 0$ oli mielivaltaisesti valittu, on siis T avoin kuvaus pisteessä $\bar{0}$, joten T on Lauseen 8.6 nojalla avoin kuvaus. $\square$

8.11. *Huomautus.* Avoimen kuvauksen lause voidaan formuloida myös seuraavalla yhtäpitävällä tavalla:
"Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $M < \infty$, että jokaista $y \in F$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle $Tx = y$ ja $\| x \| \le M \| y \|$."

Todistus. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla löytyy sellainen $\overline{B_F(\bar{0}, 1/M)} \subset T(B_E(\bar{0}, 1))$ jollakin $M < \infty$. Jos nyt $y \in F$, niin

$$\widehat{y} = \frac{y}{M \| y \|} \in \overline{B_F(\bar{0}, 1/M)}$$

ja siten $\widehat{y} = T\widehat{x}$, missä $\| \widehat{x} \| < 1$ eli

$$y = T(M \| y \| \widehat{x}) =: Tx, \quad \text{ja} \quad \| x \| = \| M \| y \| \widehat{x} \| \le M \| y \|$$

$\square$

8.12. **Seuraus.** *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(G, F)$ jatkuva lineaarinen* injektio. *Tällöin kuva-avaruus $T(E)$ on avaruuden F suljettu aliavaruus jos ja vain jos löytyy sellainen $\beta > 0$, että*

$$\| Tx \| \ge \beta \| x \| \quad \textit{jokaisella } x \in E. \tag{8.13}$$

Huomautus. Jos yllä oleva ehto (8.13) pätee, sanomme että T on *alhaalta rajoitettu.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että $T(E)$ on suljettu. Koska $T(E) \subset F$ on Banachin avaruuden suljettu aliavaruus, niin se on myös Banachin avaruus (Lause 3.13 sivulla 29). Nyt siis $T : E \to T(E)$ on jatkuva bijektio, joten väite seuraa suoraan avoimen kuvauksen lauseesta (kun käytetään edellisen sivun muotoilua).

"$\Leftarrow$"Jos ehto (8.13) pätee, niin

$$\beta\| x \| \leq \| Tx \| \leq \alpha\| x \|$$

jokaisella $x \in E$, koska T on myös jatkuva. Siispä $T\colon E \to T(E)$ on lineaarinen isomorfismi ja Lauseen 6.13 sivulla 102 nojalla $T(E)$ on täydellinen. Nyt Lause 3.13 sivulla 29 mukaan $T(E)$ on suljettu. $\square$

Huomautus. Yleensä jatkuva lineaarinen injektio $T \in \mathscr{L}(G, F)$ *ei* ole alhaalta rajoitettu. Esimerkiksi operaattori $T : \ell^2 \to \ell^2$, $T(x_k) = (\frac{1}{k}x_k)$, kun $(x_k) \in \ell^2$, on jatkuva lineaarinen injektio. Mutta

$$\| T(0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \|_2 = \frac{1}{k} \to 0,$$

joten T ei ole alhaalta rajoitettu.

Sovellus Fourier-analyysiin

Muistamme, että jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, niin sen Fourier-kertoimet $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ Besselin epäyhtälön nojalla.

Kääntäen, Riesz–Fisherin lauseen mukaan, jos $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, niin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = a_k \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}.$$

Tästä herää seuraavat kysymykset:

1. Onko L^1-funktioille olemassa vastaava jonoavaruus X, jolle $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in X$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$?
2. Onko Riesz–Fischerin lauseella vastinetta avaruudessa L^1 ?

Ensimmäiseen kysymykseen saadaan valoa nk. Riemann–Lebesguen lemmasta:

8.14. **Lause** (Riemann–Lebesguen lemma)**.** *Jos* $f \in L^1(0, 2\pi)$*, niin*

$$(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}).$$

Todistus. HT 12/2006. $\square$

Siis $X = c_0(\mathbb{Z})$ kelpaa hyvin vastaukseksi kysymykseen 1. Seuraavaksi vastataan kysymykseen 2. eli tarkastellaan onko Riemann–Lebesguen lemman 8.14 käänteinen tulos voimassa (eli onko kysymykseen 2. vastaus myönteinen). Avoimen kuvauksen lauseen avulla osoitamme, että käänteinen tulos ei ole voimassa.

8.15. **Lause.** *Kuvaus* $T\colon f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *on jatkuva lineaarinen injektio avaruudelta* $L^1(0,2\pi)$ *avaruuteen* $c_0(\mathbb{Z})$*. Kuva-avaruus* $T(L^1(0,2\pi))$ *on tiheä avaruudessa* $c_0(\mathbb{Z})$*, mutta* T ei ole *surjektio.*

Todistus. Selvästi T on lineaarinen. Edellisen lauseen todistus näyttää, että T on jatkuva kuvaus $T\colon L^1 \to c_0$ ja $\| T \| \leq (2\pi)^{-1}$. (Itse asiassa: $\| T \| = (2\pi)^{-1}$, sillä jos $f(t) \equiv 1$ kun $t \in [0,2\pi]$, niin $\| f \|_1 = 2\pi$ ja $\| Tf \|_\infty = 1$, koska $\widehat{f}(0) = 1$ ja $\widehat{f}(k) = 0$, kun $k \neq 0$).

Näytetään seuraavaksi, että T on injektio.

On siis osoitettava, että jos $Tf = \bar{0}$, eli $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin itse asiassa $f = \bar{0}$. Oletamme siis, että $Tf = \bar{0}$, joten

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t = 0, \quad \text{aina kun } g = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}, \tag{8.16}$$

eli aina kun g on trigonometrinen polynomi. Lauseen 5.4 sivulla 76 ja Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla kaava (8.16) pätee myös kaikilla $g \in C(0,2\pi)$ (mieti yksityiskohdat tarkasti).

Jos nyt $A \subset [0,2\pi]$ on mitallinen joukko, niin Lauseen 5.6 sivulla 78 todistuksen nojalla löytyy sellainen jono $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset C(0,2\pi)$, että

$$|g_n(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0,2\pi], n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \chi_A(t) \quad \text{m.k. } t \in [0,2\pi].$$

Soveltamalla taas Lebesguen dominoidun suppenemisen lausetta, niin saamme, että kaava (8.16) pätee myös funktioille $g = \chi_A$.

Olkoon nyt $f \in L^1(0,2\pi)$ positiivinen funktio eli $f \geq 0$. Olkoon $n > 0$ ja olkoon $A_n = \{\, t \in [0,2\pi] : \ f(t) > 1/n \,\}$. Joukko A on mitallinen joukko, sillä f on mitallinen funktio. Nyt soveltamalla kaavaa (8.16) joukon A_n karakteristiseen funktioon χ_{A_n}, jolloin havaitaan että

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\chi_{A_n}(t)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{n} m(A).$$

Siispä $m(A_n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, joten päättelemme, että myös joukon $A = \bigcup A_n$ mitta $m(A) = 0$. Koska

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, t \in [0,2\pi] : \ f(t) \geq 1/n \,\} = \{\, t \in [0,2\pi] : \ f(t) > 0 \,\},$$

niin olemme osoittaneet, että $0 \le f(t) \le 0$ m.k $t \in [0, 2\pi]$, joten $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$.

Olkoon nyt $f \in L^1(0, 2\pi)$ mielivaltainen. Tällöin funktio f voidaan esittää muodossa

$$f = (u_+ - u_-) + i(v_+ - v_-), \quad u_+, u_-, v_+, v_- \ge 0.$$

Edellisen päättelyn nojalla $u_+ = u_- = v_+ = v_- = 0$ melkein kaikkialla, joten $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0, 2\pi]$. Olemme siis osoittaneet, että $\mathrm{Ker}\,(T) = \{\overline{0}\}$ ja T on injektio.

Kuva $T(L^1)$ on tiheä: Olkoon $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z}) \subset c_0(\mathbb{Z})$ äärellinen jono, ts. $|a_k| = 0$, kun $|k| > m$ (jollakin $m \in \mathbb{N}$). Tällöin trigonometrinen polynomi

$$P(t) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$$

on L^1-funktio, ja

$$\widehat{P}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} a_k \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} a_k, & \text{jos} \quad n = -m, -m+1, \ldots, m \\ 0, & \text{jos} \quad |n| > m \end{cases}$$

Siis $TP = (\widehat{P}(k))_{k \in \mathbb{Z}} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, joten päättelemme, että $c_{00}(\mathbb{Z}) \subset T(L^1)$. Koska äärelliset jonot c_{00} ovat tiheässä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, joten kuva $T(L^1)$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$.

Lopuksi osoitamme, että $T(L^1) \ne c_0(\mathbb{Z})$ eli T ei ole surjektio. Jos T olisi surjektio, eli $T(L^1) = c_0$, niin silloin $T \colon L^1 \to c_0$ olisi bijektio. Tällöin avoimen kuvauksen lauseen nojalla T olisi isomorfismi, joten erityisesti

$$\| Tf \|_\infty \ge \beta \| f \|_1 \tag{8.17}$$

jokaisella $f \in L^1(0, 2\pi)$.

Toisaalta tiedämme, että Dirichlet'n ydin $D_n(x) \in L^1(0, 2\pi)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja lisäksi $\| (\widehat{D}_n(k)) \|_\infty = 1$. Toisaalta Lauseen 7.9 sivulla 112 todistuksessa osoitimme (kaava (7.12)), että $\| D_n \|_1 \to \infty$. Tämä johtaa ristiriitaan arvion (8.17) kanssa, joten T ei ole surjektio. $\square$

Esitämme vielä *suljetun kuvaajan lauseen* (Lause 8.20 alla), joka on avoimen kuvauksen lauseen sovellus (itse asiassa sen yhtäpitävä versio). Tämän keskeisen tuloksen avulla voidaan usein helpommin todistaa, että annettu lineaarikuvaus on jatkuva.

8.18. **Määritelmä.** Kuvauksen $f \colon X \to Y$ *kuvaaja* on joukko

$$G(f) = \{\ (x, f(x)) \in X \times Y :\ x \in X\ \} \subset X \times Y.$$

Jos E ja F ovat normiavaruuksia, niin varustetaan seuraavassa $E \times F$ normilla

$$\| (x,y) \| = \| x \| + \| y \| \quad , (x,y) \in E \times F.$$

Tällöin $(E \times F, \| \cdot \|)$ on Banachin avaruus, jos E ja F ovat Banachin avaruuksia (tarkista!). Seuraavaksi yleinen topologinen tieto:

8.19. **Lause.** *Olkoon E ja F normiavaruuksia sekä $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin funktion f kuvaaja $G(f) \subset E \times F$ on suljettu joukko.*

Todistus. Jos $(x,y) \in \overline{G(f)} \subset E \times F$, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen jono $(x_n, y_n) \in G(f)$, että

$$\| (x_n, y_n) - (x,y) \|_{E \times F} \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Määritelmän nojalla $(x_n, y_n) \in G(f)$ tarkoittaa, että $y_n = f(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi

$$\| x_n - x \| \leq \| (x_n, y_n) - (x,y) \|_{E \times F} \to 0,$$

kun $n \to \infty$, joten lisäksi $x_n \to x$ avaruudessa E. Koska oletimme, että f on jatkuva, niin $f(x_n) \to f(x)$ avaruudessa F. Toisaalta $f(x_n) = y_n$ ja vastaavasti kuin jonolle (x_n) voidaan osoittaa, että $f(x_n) = y_n \to y$ avaruudessa F, joten raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $y = f(x)$ eli $(x,y) = (x, f(x)) \in G(f)$. Siispä $G(f)$ on suljettu avaruudessa $E \times F$. $\square$

Huomautus. Jos $T\colon E \to F$ on lineaarinen, niin sen kuvaaja $G(T)$ on avaruuden $E \times F$ vektorialiavaruus. Jos E ja F on Banachin avaruuksia, niin edellisen lauseen nojalla ja sitä edeltäneen huomautuksen nojalla $G(T)$ on myös Banachin avaruus.

Suljetun kuvaajan lause kertoo, että käänteinen tulos pätee *lineaarikuvauksille* $T\colon E \to F$, missä E, F ovat Banachin avaruuksia.

8.20. **Lause** (Suljetun kuvaajan lause). *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia, ja $T : E \to F$ sellainen lineaarikuvaus, että kuvaaja*

$$G(T) = \{ \, (x, Tx) : \ x \in E \, \} \subset E \times F \quad \textit{on suljettu joukko.}$$

Tällöin T on jatkuva, eli $T \in \mathscr{L}(E,F)$.

Todistus. Koska $E \times F$ on Banachin avaruus ja kuvaaja $G = G(T)$ on suljettu vektorialiavaruus, niin G on Banachin avaruus Lauseen 3.12 sivulla 29 nojalla. Määritellään kuvaus $\psi : G(T) \to E$ asettamalla

$$\psi\big((x, Tx)\big) = x, \quad (x, Tx) \in G(T).$$

Koska kuvaus T on lineaarinen, niin ψ lineaarinen. Lisäksi ψ on bijektio, sillä selvästi ψ on surjektio ja ψ on myös injektio, sillä

$$\psi\big((x, Tx)\big) = \bar{0} \Longrightarrow x = \bar{0} \Longrightarrow (x, Tx) = (\bar{0}, \bar{0}).$$

Lisäksi ψ on rajoitettu, sillä

$$\|\, \psi\big((x, Tx)\big)\, \| = \|\, x\, \| \leq \|\, x\, \| + \|\, Tx\, \| = \|\, (x, Tx)\, \|, \quad (x, Tx) \in G(T).$$

Siispä ψ on jatkuva lineaarinen bijektio $G(T) \to E$. Nyt avoimen kuvauksen lauseen 8.7 (tai sen muotoilun Seuraus 8.8) nojalla myös käänteiskuvaus ψ^{-1} on jatkuva, joten ψ on homeomorfismi. Nyt Seurauksen 6.11 sivulla 102 nojalla on olemassa vakio sellainen $\beta > 0$, että

$$\beta\|\, (x, Tx)\, \| \leq \|\, \psi\big((x, Tx)\big)\, \| = \|\, x\, \| \quad \text{kaikilla } (x, Tx) \in G(T).$$

Tämän avulla saadaan arvio

$$\beta\|\, Tx\, \| \leq \beta(\|\, x\, \| + \|\, Tx\, \|) = \beta\|\, (x, Tx)\, \| \leq \|\, x\, \| \quad \text{kaikilla} \quad x \in E.$$

Siis $\|\, Tx\, \| \leq (1/\beta)\|\, x\, \|$, joten T on jatkuva. □

8.21. *Huomautus.* Edellisessä lauseessa lineaarisuus on oleellinen oletus, sillä on olemassa epäjatkuva (ja epälineaarinen) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jonka kuvaaja $G(f) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on suljettu (Harjoitustehtävä).

8.22. *Huomautus.* Suljetun kuvaajan lause antaa uuden laskennallisen menetelmän lineaarisen kuvauksen T jatkuvuuden toteamiseen. Lauseen nojalla riittää osoittaa, että $\overline{G(T)} = G(T)$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että jos jokaisella $x \in E$ seuraava ehto toteutuu:

(*)
$$\left.\begin{array}{ll} x_n \to x & \text{avaruudessa } E \\ Tx_n \to y & \text{avaruudessa } F \end{array}\right\} \Longrightarrow y = Tx.$$

Seuraavassa tarkastellaan tyypillistä suljetun kuvaajan lauseen sovelluta.

8.23. **Esimerkki.** Olkoon $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ ”ääretön” matriisi, joka toteuttaa ehdot:

(1) Matriisi (a_{ij}) on rajoitettu, eli

$$M := \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty.$$

(2) Jos $s = (s_j) \in \ell^1$ on mielivaltainen jono, niin $(t_i) \in \ell^1$, kun

$$t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Ehto (2) sanoo, että matriisi (a_{ij}) määrittelee lineaarikuvauksen $A : \ell^1 \to \ell^1$, jolle

$$As = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j \Big)_{i \in \mathbb{N}}, \quad \text{kun} \quad s = (s_j) \in \ell^1.$$

Intuitiivisesti tämä voidaan ajatella seuraavasti:

$$As = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad s = (s_j) \in \ell^1.$$

Harjoitustehtävänä (HT 12/2006) osoitamme, että A on jatkuva käyttämällä suljetun kuvauksen lausetta.