7. Tasaisen rajoituksen periaate

Täydellisyydestä puristetaan maksimaalinen hyöty seuraavan *Bairen lauseen* avulla. Bairen lause on keskeinen todistettaessa kahta funktionaalianalyysin "kolmesta suuresta perustuloksesta", nimittäin *tasaisen rajoituksen periaate* (tämä luku) sekä *avoimen kuvauksen lause* (luku 8). Kolmas näistä suurista perustuloksista (*Hanh–Banachin lause*) tulee dualiteetin yhteydessä luvussa 9, ja se *ei* perustu täydellisyyteen.

Koska Bairen lauseella on muitakin sovelluksia, tarkastelemme sitä yleisissä metrisissä avaruuksissa. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Palautetaan mieliin: jono $(x_n) \subset X$ on Cauchyn jono, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon, \qquad \text{aina kun } p, q \geq n_\varepsilon.$$

Aivan kuten normiavaruuksienkin tapauksessa, metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono $(x_n) \subset X$ suppenee.

Bairen lause käsittelee avoimia tiheitä osajoukkoja $V \subset X$. Esimerkkejä tällaisista ovat $V = \mathbb{R}^n \backslash [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$, kun $n \geq 2$ tai vaikkapa $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Huomautus. Osajoukko $V \subset X$ on tiheä $\iff \bar{V} = X \iff B(x, r) \cap V \neq \emptyset$ kaikilla $x \in X$, $r > 0 \iff W \cap V \neq \emptyset$ kaikilla avoimilla $\emptyset \neq W \subset X$.

Seuraava lause on nk. Bairen lause tai *Bairen kategorialause*, jonka esitti ensimmäisenä *Rene Baire* (1874–1932).

7.1. **Lause** (Bairen lause). *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus. Jos $V_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, on* ***numeroituva*** *kokoelma avoimia tiheitä osajoukkoja, niin*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} V_j \text{ on } \textbf{\textit{tiheä}} \text{ avaruudessa } X.$$

Erityisesti siis $\bigcap V_j \neq \emptyset$.

Todistus. Kts. Väisälä: Topologia II, 10.8. □

Bairen lause tulee usein käyttöön seuraavassa (yhtäpitävässä) muodossa:

7.2. **Seuraus.** *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus, ja*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

missä $F_n \subset X$ on suljettu *kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Silloin ainakin yksi joukoista F_n sisältää avoimen pallon (erityisesti* sisus $\mathrm{int}(F_n) \neq \emptyset$).

Todistus. Olkoon $V_n = X \setminus F_n$ kun $n \in \mathbb{N}$, jolloin $V_n \subset X$ on avoin kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että millään $n \in \mathbb{N}$ joukko F_n ei sisällä avointa palloa $B(x, r)$, eli

$$V_n \cap B(x,r) \neq \emptyset \quad \text{kaikilla } x \in X \text{ ja } r > 0.$$

Siispä V_n on tiheä ja avoin jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Nyt Bairen lause mukaan leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ on tiheä avaruudessa X. Erityisesti siis löytyy sellainen alkio $x \in X$, että

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus F_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Mutta tämä on ristiriidassa oletuksen $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ kanssa. Siispä vastaoletus on väärä ja väite seuraa. □

Muotoilemme aluksi ensimmäisen suurista lauseista ja todistamme sen soveltamalla Bairen lausetta.

7.3. **Lause** (Banach–Steinhausin lause eli tasaisen rajoituksen periaate)**.** *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus jaä $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ kokoelma jatkuvia lineaarikuvauksia $T_\alpha \colon E \to F$ (tässä indeksijoukko $J \neq \emptyset$ on mielivaltainen). Tällöin on kaksi toisensa poissulkevaa vaihtoehtoa.*

1. *Joko on olemassa sellainen luku $M < \infty$, että*

$$\| T_\alpha \| \leq M \quad \textit{jokaisella } \alpha \in J,$$

2. *tai on olemassa kiinteä vektori $x \in E$, jolle*

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| = \infty.$$

Erityisesti siis, jos $M(x) := \sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| < \infty$ jokaisella $x \in E$, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha \| = \sup_{\alpha \in J} \sup_{x \in B_E} M(x) < \infty.$$

Huomautus. Jos väite 1. ei toteudu, niin a priori on olemassa *vektorit* $x_\alpha \in E$ $(\alpha \in J)$, joille $\| x_\alpha \| = 1$ ja $\sup_\alpha \| T_\alpha x_\alpha \| = \infty$. Väite 2. sanookin, että voidaan valita *yksi* ja *sama* vektori $x \in E$ kaikilla $\alpha \in J$.

Ennen kuin todistamme Banach–Steinhausin lauseen, tarkastelemme hieman sen käyttöä.

Ensimmäisenä tasaisen rajoituksen periaatteen sovelluksena osoitamme vahvan parannuksen pisteittäisen rajaoperaattorin jatkuvuudelle (katso Esimerkki 6.5 sivulla 99 ja Lause 6.6 sivulla 100).

7.4. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus, F normiavaruus ja $(T_n) \subset \mathscr{L}(E,F)$ sellainen jono jatkuvia lineaarikuvauksia, että $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ on olemassa kaikilla $x \in E$. Tällöin $T \in \mathscr{L}(E,F)$ eli T on jatkuva.*

Todistus. Kuvaus T on lineaarinen Lauseen 6.2 sivulla 98 nojalla. Oletuksen mukaan jono $(T_n x)$ suppenee avaruudessa F jokaisella $x \in E$. Siispä jono $(T_n x)$ on Cauchyn jono ja edelleen siis Lauseen 3.3 sivulla 25 mukaan rajoitettu. Siispä

$$M(x) \equiv \sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n x \| < \infty \quad \forall x \in E.$$

Nyt Banach–Steinhausin Lauseen 7.3 nojalla löytyy sellainen $M < \infty$, että $\| T_n \| \le M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Saadaan siis

$$\| Tx \| = \lim_{n\to\infty} \| T_n x \| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \| T_n \| \cdot \| x \| \le M \| x \|$$

kun $x \in E$, joten $\| T \| \le M$. □

Lähtöavaruuden täydellisyys on edellä olennainen ehto:

7.5. **Esimerkki.**
Esimerkin 6.3 sivulla 98 mukaisessa tilanteessa

$$\mathcal{P} = \{ x : \ x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi} \}$$
$$\| x \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|, \quad \text{ja } T_n x = n\big(x(1) - x(1 - \tfrac{1}{n})\big),$$

kun $x \in P$ polynomi. Esimerkissä 6.3 sivulla 98 näytettiin, että $T_n \in \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ja $T_n x \to Tx$ kun $n \to \infty$. Edelleen osoitettiin, että $Tx = -x'(1)$, kun x polynomi, mutta tällöin Tässä $T \notin \mathscr{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$ ei ole jatkuva. Johtopäätökset:

i) $(\mathcal{P}, \| \cdot \|)$ ei ole täydellinen (toinen tapa on näytetty harjoituksissa)

ii) Oletus E Banachin avaruus on *olennainen* Lauseessa 7.4.

Koska olemme saaneet jo hieman esimakua Banach–Steinhausin lauseen tehokkuudesta ja voimasta, niin siirrymme lauseen todistukseen.

Banach–Steinhausin lauseen todistus. Olkoon

$$F(n, \alpha) := \{ x \in E : \ \| T_\alpha x \| \le n \},$$

kun $\alpha \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus $f_\alpha \colon x \mapsto \| T_\alpha x \|$ on kahden jatkuvan kuvauksen yhdisteenä jatkuva. Siispä $F(n, \alpha) = f_\alpha^{-1}([-n, n]) \subset E$ on suljettu joukko jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $n \in \mathbb{N}$, sillä joukko $[-n, n] \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja f_α on jatkuva. Tällöin myös leikkausjoukko

$$F_n := \bigcap_{\alpha\in J} F(n, \alpha) \subset E \text{ on suljettu,}$$

sillä mielivaltainen leikkaus suljetuista joukoista on edelleen suljettu.

Oletetaan nyt, että vaihtoehto 2. *ei* päde. Väitteen todistamiseksi on siis osoitettava, että tällöin vaihtoehto 1. on välttämättä voimassa.

Olkoon $x \in E$ mielivaltainen. Koska oletimme, että vaihtoehto 2. ei päde, niin

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| < \infty.$$

Siten löytyy sellainen $n \in \mathbb{N}$, että

$$\sup_{\alpha \in J} \| T_\alpha x \| \leq n.$$

Siispä $x \in F(n, \alpha)$ jokaisella $\alpha \in J$ eli $x \in F_n$. Tästä päättelemme välittömästi, että

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Koska E on Banachin avaruus, niin Seurauksen 7.2 nojalla löytyy sellainen $N \in \mathbb{N}$ ja sellainen avoin pallo $B(x_0, r_0)$, että

$$B(x_0, r_0) \subset F_N. \tag{7.6}$$

Osoitamme seuraavaksi, että palloehdosta (7.6) seuraa, että $\| T_\alpha x \| \leq 2N/r_0$ jokaisella $\alpha \in J$ ja jokaisella $x \in B_E(\bar{0}, 1)$. Olkoon $x \in E$ ja $\| x \| < 1$. Tällöin $x_0 + r_0 x \in B(x_0, r_0)$, joten $\| T_a(x_0 + r_0 x) \| \leq N$. Siispä

$$\begin{aligned} \| T_\alpha x \| &= \frac{1}{r_0} \| T_\alpha(r_0 x) \| = \frac{1}{r_0} \| T_\alpha(x_0 + r_0 x) - T_\alpha(x_0) \| \\ &\leq \frac{1}{r_0} \big(\| T_\alpha(x_0 + r_0 x) \| + \| T_\alpha(x_0) \| \big) \leq \frac{2N}{r_0} =: M \end{aligned}$$

Siis $\| T_\alpha \| \leq M$ jokaisella $\alpha \in J$. □

7.7. **Esimerkki.** Olkoon $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sellainen lukujono, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee avaruudessa } \mathbb{R} \textit{ kaikilla } x = (x_k) \in \ell^1. \tag{7.8}$$

Havaitaan, että jos $(a_k) \in \ell^\infty$ on rajoitettu jono, niin (7.8) toteutuu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, |x_k| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \text{kun} \quad x = (x_k) \in \ell^1$$

Siispä sarja $\sum a_k x_k$ suppenee (jopa itseisesti),kun $x = (x_n) \in \ell^1$. Herää kysymys, onko olemassa muita lukujonoja (a_k), joille (7.8) on voimassa? Harjoitustehtävänä (HT 10/2006) osoitimme käänteisen suunnan, eli jos jono (a_k) toteuttaa ehdon (7.8) jokaisella $x \in \ell^1$, niin välttämättä jono $(a_k) \in \ell^\infty$. Sivuhuomatuksen mainittakoon, että tämä esimerkki liittyy läheisesti luvun 9 duaalisuuteen.

Banach–Steinhausin lauseen sovelluksia Fourier-sarjoihin

Muistamme, että C^1-funktioille Fourier-sarja suppenee pisteittäin ja jokaisella L^2-funktiolla Fourier-sarja suppenee ainakin L^2-normin mielessä. Edellisten tietojen valossa seuraava tulos on yllättävä (tämä Banach–Steinhausin lauseen sovellus oli ainakin yllätys löytöaikanaan):

7.9. **Lause.** *On olemassa* jatkuva 2π*-jaksollinen funktio* $f \in C(0, 2\pi)$*, jonka Fourier-sarja*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

hajaantuu *pisteessä* $x = 0$.

Todistus. Olkoon

$$S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Näytämme, että on olemassa sellainen jatkuva funktio $f \in C(0, 2\pi)$, jolla $f(0) = f(2\pi)$ ja

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f; 0)| = \infty,$$

mistä erityisesti seuraa, että funktion f Fourier-sarja hajaantuu, kun $x = 0$. Edelleen tästä seuraa, että $S_n(f; 0) \not\to f(0)$, kun $n \to \infty$. Tähän tarvitaan luvun 5 tietoja. Lemman 5.2 sivulla 74 mukaan

$$S_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x - t) \, \mathrm{d}t = (D_n * f)(x),$$

missä D_n on Dirichlet'n ydin

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\big((n + \frac{1}{2})x\big)}{\sin(\frac{x}{2})} \tag{7.10}$$

Asetetaan

$$\Lambda_n(f) = S_n(f; 0).$$

Tällöin kuvaus Λ_n on lineaarinen $C(0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, ja

$$\begin{aligned}
|\Lambda_n(f)| &= \frac{1}{2\pi} \Big| \int_0^{2\pi} f(t) D_n(-t) \, \mathrm{d}t \Big| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||D_n(-t)| \, \mathrm{d}t \\
&\overset{D_n(-t) = D_n(t)}{\le} \frac{\| f \|_\infty}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

kun $f \in C(0, 2\pi)$, joten $\| \Lambda_n \| \le (2\pi)^{-1} \| D_n \|_1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoitamme, että edellinen arvio on itse asiassa yhtäsuuruus eli osoitamme, että

$$\| \Lambda_n \| \ge \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{7.11}$$

Lisäksi osoitamme, että

$$\lim_{n\to\infty} \| D_n \|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t = \infty, \tag{7.12}$$

mikä yhdessä edellisen yhtäsuuruuden $\| \Lambda \|_n = (2\pi)^{-1} \| D_n \|_1$ osoittaa yhdessä tasaisen rajoituksen periaatteen väitteen, kuten tulemme pian huomaamaan. Osoitetaan ensin jälkimmäinen väite (eli raja-arvo väite (7.12)), sillä se on suoraviivaisempi osoittaa. Ajatuksena on soveltaa hyvin tunnettua arviota $|\sin(\frac{t}{2})| < \frac{t}{2} < t$, joka on voimassa kaikilla $t > 0$ esitykseen (7.10). Suoraan arvioimalla saamme

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, \mathrm{d}t &\geq \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})t)|}{t} \, \mathrm{d}t \geq \int_0^{\pi} |\sin((n+\tfrac{1}{2})t)| \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin s| \frac{\mathrm{d}s}{s} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \longrightarrow \infty, \quad \text{kun} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Osoitamme nyt epäyhtälön (7.11). Olkoon g_n funktio

$$g_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kun } D_n(-t) \geq 0 \\ -1, & \text{kun } D_n(-t) < 0 \end{cases}$$

Tällöin on olemassa jono *jatkuvia* funktioita $(f_j) \subset C(0, 2\pi)$, joille

$$-1 \leq f_j(t) \leq 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{j\to\infty} f_j(t) = g_n(t) \text{ pisteittäin.}$$

Tämä nähdään vertaamalla Lemmaan 5.6 tai tekemällä suora päättely päättely:

tähän tulee kuva!!

Koska $\| f_j \|_\infty \leq 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla, kun majoranttina käytetään funktiota $|D_n| \in L^1$, saadaan

$$\begin{aligned}
\| \Lambda_n \| &\geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \Lambda_n(f_j) \geq \lim_{j\to\infty} \Lambda_n(f_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(t) D_n(-t) \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_n(t) D_n(-t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(-t)| \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Siis epäyhtälö (7.11) pätee, ja siten $\| \Lambda_n \| \to \infty$, kun $n \to \infty$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehto 2. jää jäljelle, sillä suljimme vaihtoehdon 1. pois. Siispä on olemassa sellainen jatkuva $f \in C(0, 2\pi)$, jolle

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\Lambda_n(f)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f; 0)| = \infty,$$

mikä osoittaa väitteen. □

Lisätietoja Fourier-sarjoista:

– Du-Bois–Reymond (1876): *konkreettinen* jatkuva 2π -periodinen f, jonka vastaava Fourier-sarja $\sum \widehat{f}(k)e^{ikx}$ hajaantuu pisteessä $x = 0$ (kts. [Körner: Fourier Analysis, luku 18]).
– Banach ja Steinhaus (n. 1920-luku): Lauseen 7.9 *ei-konstruktiivinen* esimerkki.
– Kolmogorov (1926): on olemassa sellainen integroituva $f \in L^1(0, 2\pi)$, jonka Fourier-sarja hajaantuu *joka* pisteessä $x \in [0, 2\pi]$!

Muistamme, että jos $f \in L^2$, niin funktion f Fourier-sarja suppenee L^2-normin mielessä. Onko sama voimassa funktiolle avaruudessa L^1 ?? Nyt vastaamme tähän Banach–Steinhausin lauseen avulla negatiivisesti.

7.13. **Lause.** *On olemassa sellainen $f \in L^1(0, 2\pi)$, että*

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \Big\|_{L^1} \nrightarrow 0, \quad \textit{kun } n \to \infty.$$

Todistus. Määritellään $T_n \colon L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ asettamalla

$$(T_n f)(x) = S_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx},$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$, $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Selvästi T_n on lineaarinen. Suoraan laskemalla saamme yksinkertaisen arvion funktion f Fourier-kertoimille

$$|\widehat{f}(k)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)||e^{ikt}| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \| f \|_1,$$

kun $f \in L^1(0, 2\pi)$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Siispä saamme trigonometrisen polynomin $T_n f$ L^1-normille arvion

$$\| T_n f \|_1 = \Big\| \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \Big\|_1 \le \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)| \, \| e^{ikx} \|_{L^1} \le (2n + 1)\| f \|_1$$

kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten $T_n \colon L^1(0, 2\pi) \to L^1(0, 2\pi)$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Väitteen osoittamiseksi teemme vastaoletuksen. Oletamme, että kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n f - f \|_1 = 0.$$

Tällöin jono $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$, joten $\sup \| T_n f \|_1 < \infty$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$. Nyt Banach–Steinhausin lauseen 7.3 vaihtoehdon 1. mukaan $\| T_n \| \le M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Toisaalta tiedämme, että Fejérin ydin on

$$K_j(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{j} D_k(x).$$

Tällöin voimme päätellä sivulla 74 oleva Lemman 5.3 sekä Fejérin Lauseen 5.4 (sivulla 76), että $T_n(K_j) = D_n * K_j = K_j * D_n \to D_n$ tasaisesti välillä $[0, 2\pi]$. Koska $K_j \ge 0$ ja

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_j(t)\, \mathrm{d}t = 1,$$

niin $(2\pi)^{-1} \| K_j \|_1 = 1$ jokaisella $j \in \mathbb{N}$ ja siis

$$2\pi \| T_n \| \ge \sup_j \| T_n(K_j) \|_{L^1} \ge \lim_{j\to\infty} \| T_n(K_j) \|_{L^1} = \| D_n \|$$

Edellisen lauseen todistuksen mukaan $\| D_n \|_1 \to \infty$, joten siis $\| T_n \| \to \infty$, kun $n \to \infty$, mikä johtaa ristiriitaan. Siis $S_n(f; x)$ ei suppene kohti funktiota f normin mielessa avaruudessa L^1 jollakin $f \in L^1(0, 2\pi)$. □

Kolmogorovin tulos vuodelta 1926 ja edellinen lause näyttävät, että Fourier-sarjojen yhteydessä avaruus L^1 poikkeaa huomattavasti avaruudesta L^2. Herää kysymys, miten muut L^p-avaruudet käyttäytyvät ? Voidaan todistaa (mutta todistukset sivuutetaan tällä kurssilla), soveltamalla joko funktioteoriaa tai nk. *singulaarisia integraaleja*, että jos $1 < p < \infty$, niin funktion $f \in L^p(0, 2\pi)$ Fourier-sarja suppenee L^p-normissa kohti funktiota f.

Pisteittäisestä suppenemisesta tiedetään tiedetään, jos $1 < p < \infty$ ja $f \in L^p(0, 2\pi)$, niin Fourierin osasumma on

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \quad \text{m.k. } x \in [0, 2\pi].$$

Tämä tulos on syvällinen *Carlsonin–Huntin* lause 60-luvulta.