

6. LINEAARISET OPERAATTORIT

Luvussa 5 osoitimme, että Fourier-sarjat suppenevat L^2 -normissa (kts. Seuraus 5.8 sivulla 80). Osoitimme myös, että kun f on jatkuva ja 2π -periodinen funktio, niin Fourier-osasummien *aritmeettiset keskiarvot* suppenevat tasaisesti kohti funktiota f (kts. Fejérin lause 5.4 sivulla 76). Koska nälkä vain kasvaa syödessä, niin voimme miettiä uusia luontevia Fourier-sarjoihin liittyviä kysymyksiä:

Kysymys 1: Suppeneeko Fourier-sarja L^1 -normissa, jos f on L^1 -funktio ?

Kysymys 2: Suppeneeko jatkuvan funktion Fourier-sarja pisteittäin ? Eli jos $f \in C(0, 2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$, onko

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f; x) \text{ kaikilla } x?$$

Näiden kysymysten ratkaisemiseksi meidän on tutkittava Fourier-osasummien $S_n(f; \cdot)$ ominaisuuksia lineaarisena operaattorina $f \mapsto S_n(f; \cdot)$. Itse asiassa, jatkuvan lineaarikuvauksen käsite on funktioanalyysin keskeisiä peruskäsitteitä. Palautetaan lyhyesti mieleen kurssin alkupuolella jo esitellyt lineaariset operaattorit.

Olkoon E ja F vektoriavaruuksia. Kuvaus $T: E \rightarrow F$ on *lineaarinen*, jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

kun $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Linearisesta kuvauksesta käytetään usein nimitystä *lineaarinen operaattori*; näin erityisesti siinä tapauksessa, että T on jatkuva.

Luvussa 2 käsitelimme jo lineaaristen operaattoreiden jatkuvuutta (kts. Määritelmä 2.21 sivulla 20 ja Lause 2.26 sivulla 22). Lisäksi osoitimme, että lineaarikuvaus T on jatkuva jos ja vain jos sen operaattorinormi $\|T\|$ on äärellinen. Lineaarikuvauksen $T: E \rightarrow F$ Operaattorinormihan määriteltiin

$$\|T\| = \sup_{x \in B_e} \|Tx\|_F.$$

Nyt ryhdymme tarkastelemaan operaattoreiden itsensä muodostamia avaruuksia. Tätä varten otamme käyttöön muutaman uuden merkinnän. Olkoon E ja F normiavaruuksia. Asetamme

$$L(E, F) = \{ T: E \rightarrow F : T \text{ on lineaarikuvaus } \},$$

$$\mathcal{L}(E, F) = \{ T: E \rightarrow F : T \text{ on jatkuva lineaarikuvaus } \},$$

ja erityisesti, kun $F = E$, merkitsemme $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Nyt osoittautuu, että jatkuvat lineaariset operaattorit muodostavat normiavaruuden, kun normiksi valitaan operaattorinormi.

6.1. Lause. *Olkoot E ja F normiavaruuksia, joissa skalaarikuntana on \mathbb{K} . Tällöin $\mathcal{L}(E, F)$ on \mathbb{K} -kertoiminen normiavaruus, jossa normina on operaattorinormi*

$$T \mapsto \|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Todistus. Jos $S, T \in L(E, F)$, niin vastaava summaoperaattori on

$$(S + T)(x) = Sx + Tx, \quad x \in E.$$

Kuvaus $V = S + T$ on lineaarinen kuvaus $E \rightarrow F$, sillä jos $x, y \in E$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, niin

$$\begin{aligned} V(\alpha x + \beta y) &= S(\alpha x + \beta y) + T(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha Sx + \beta Sy + \alpha Tx + \beta Ty \\ &= \alpha(Sx + Tx) + \beta(Sy + Ty) \\ &= \alpha V(x) + \beta V(y) \end{aligned}$$

Samoin kuvaus cS on lineaarinen $E \rightarrow F$, kun $(cS)(x) = cSx$, $x \in E$ ja $c \in \mathbb{K}$. Toteamme siis, että $L(E, F)$ on vektoriavaruus, kun nolla-alkiona on nollakuvaus $\bar{0}(x) = \bar{0}_F$ kaikilla $x \in E$.

Näytämme seuraavaksi, että $\mathcal{L}(E, F)$ on avaruuden $L(E, F)$ vektorialiavaruus ja kuvaus $T \mapsto \|T\|$ on normi vektoriavaruudessa $\mathcal{L}(E, F)$. Tämän näyttämiseksi käydään läpi normin aksiomat:

(N1) Olkoon $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$ ja $x \in B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Tällöin soveltamalla kolmioepäyhtälöä avaruudessa F saadaan, että

$$\|(S + T)x\|_F = \|Sx + Tx\|_F \leq \|Sx\|_F + \|Tx\|_F \leq \|S\| + \|T\|$$

sillä $\|x\| \leq 1$. Siis

$$\|S + T\| = \sup_{x \in B_E} \|(S + T)x\|_F \leq \|S\| + \|T\|.$$

Edelleen tästä seuraa, että operaattori $S + T$ on jatkuva, joten $S + T \in \mathcal{L}(E, F)$.

(N2) Olkoon $c \in \mathbb{K}$ ja $x \in B_E$. Tällöin $\|cTx\|_F = |c|\|Tx\|_F$, joten

$$\begin{aligned} \|cT\| &= \sup\{\|cTx\|_F : x \in B_E\} = |c| \sup\{\|Tx\|_F : x \in B_E\} \\ &= |c| \|T\| \end{aligned}$$

Erityisesti tästä seuraa, että $cT \in \mathcal{L}(E, F)$. Nyt yhdessä edellisen kohdan (N1) kanssa tästä seuraa, että $\mathcal{L}(E, F)$ on vektoriavaruuden $L(E, F)$ vektorialiavaruus.

(N3) Operaattorinormin positiivisuus on selvä. Jos $\|T\| = 0$, niin $\|Tx\|_F = 0$ kaikilla $x \in E$ eli $Tx = \bar{0}$ kaikilla $x \in E$. Siispä $T = \bar{0}$, missä $\bar{0}$ on nollaoperaattori, joka on avaruuden $L(E, F)$ nolla-alkio. Käänteinen suunta on selvä.

Siispä $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ on normiavaruus. □

Tutkimme seuraavaksi, milloin avaruus $\mathcal{L}(E, F)$ on Banachin avaruus eli täydellinen operaattorinormissa. Tätä ennen pohdimme hiukan erilaisia operaattoreihin liittyviä suppenemiskäsitteitä. Koska lineaariset operaattorit ovat kuvauksia, voimme puhua niiden pisteittäisestä suppenemisestä. Siis jos E ja F normiavaruuksia ja $A \subset E$ osajoukko, niin sanomme että jono (f_n) kuvauksia $f_n: A \rightarrow F$ *suppenee pisteittäin* joukossa A kohti kuvausta $f: A \rightarrow F$, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Havaitsemme, että pisteittäinen suppeneminen säilyttää lineaarisuuden eli lineaaristen kuvausten pisteittäinen raja on myös lineaarinen kuvaus.

6.2. Lause. *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $(T_n) \subset L(E, F)$ jono lineaarikuvauksia, jotka suppenevat pisteittäin kohti kuvausta $T: E \rightarrow F$. Tällöin $T \in L(E, F)$.*

Todistus. Suoraan laskemalla

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T_n x + \mu T_n y) \\ &= \lambda T x + \mu T y. \end{aligned}$$

□

Nyt herääkin kysymys, säilyykö lineaarisen kuvauksen jatkuvuuskin pisteittäisessä suppenemisessä? Vastaus on yleisessä tapauksessa kielteinen, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

6.3. Esimerkki. Olkoon $\mathcal{P} = \{x : x \text{ on } \mathbb{R}\text{-kertoiminen polynomi}\}$ ja $\|x\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, kun $x \in \mathcal{P}$. Määrittemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$ kuvauksen

$$T_n x = n(x(1) - x(1 - \frac{1}{n})).$$

Tällöin $T_n: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarinen ja $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{P}, \mathbb{R})$, sillä $|x(1)|, |x(1 - \frac{1}{n})| \leq \|x\|_\infty$, joten $\|T_n x\| \leq 2n\|x\|_\infty$. Siispä $\|T_n\| \leq 2n$. Toisaalta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1) - x(1 - \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = x'(1),$$

joten jono (T_n) suppenee *pisteittäin* kohti kuvausta $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x'(1)$. Kuitenkaan kuvaus T ei ole jatkuva: jos $x_n(t) = t^n$, niin $\|x_n\|_\infty = 1$ ja

$$|Tx_n| = |x'_n(1)| = n, \text{ joten } \|T\| \leq \sup_n |Tx_n| = \infty.$$

Siis normiavaruuden jatkuvien lineaarikuvausten pisteittäinen raja ei välttämättä olekaan jatkuva. Ehkä yllättäen, täydellisyys pelastaa tilanteen, kuten tulemme näkemään luvussa 7 (käyttämällä tasaisen rajoituksen periaatetta).

Palaamme nyt lyhyen pisteittäisen suppenemisen tarkastelun jälkeen operaattorinormin määräämään suppenemiseen.

6.4. Määritelmä. Jos $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(E, F)$ ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$, niin sanomme, että jono (T_n) suppenee kohti operaattoria T *normin mielessä*, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Tällöin merkitsemme $T_n \rightarrow T$.

Huomautus. Jos T_n suppenee normin mielessä kohti operaattoria T , niin se suppenee myös pisteittäin, sillä kaikilla $x \in E$,

$$\|T_n x - T x\| = \|(T_n - T)x\| \leq \|T_n - T\| \|x\| \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$.

Käänteinen väite ei kuitenkaan pidä paikkaansa.

6.5. Esimerkki. Määrittelemme lineaarikuvaukset $T_n: \ell^1 \rightarrow \ell^1$ asettaen

$$T_n x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots),$$

kun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\|T_n x\|_1 = \sum_{k=n}^\infty |x_k| \leq \sum_{k=0}^\infty |x_k| = \|x\|_1,$$

kun $x \in \ell^1$, joten kuvaukset T_n ovat jatkuvia ja $\|T_n\| \leq 1$. Edelleen, $T_n(x) \rightarrow \bar{0}$ kaikilla $x \in \ell^1$ eli $T_n \rightarrow \bar{0}$ pisteittäin.

Kuitenkaan jono (T_n) ei suppene normin mielessä kohti nollaoperaattoria: Jos

$$e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ kpl}}, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^1,$$

niin $T_n e_n = e_n$ ja siis $\|T e_n\|_1 = \|e_n\|_1 = 1$, joten $\|T_n\| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olemme jo todenneet, että jatkuvien lineaaristen operaattoreiden pisteittäinen suppeneminen ei takaa jatkuvuutta. Suppeneminen normin suhteen muuttaa tilanteen, kuten seuraava tulos osoittaa. Lisäksi, seuraavan keskeisen tuloksen avulla voimme rakentaa uusia Banachin avaruuksia lähtien tunnetuista avaruuksista.

6.6. Lause. *Jos E on normiavaruus ja F on Banachin avaruus, niin $\mathcal{L}(E, F)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon (T_n) Cauchyn jono avaruudessa $\mathcal{L}(E, F)$ ja $x \in E$. Tällöin on

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|,$$

kun $n, m \in \mathbb{N}$, joten jono $(T_n x)$ on Cauchyn jono avaruudessa F . Koska F on täydellinen, niin jono $(T_n x)$ suppenee ja merkitään tätä rajaa

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$$

Siispä jono (T_n) suppenee kohti kuvausta T pisteittäin, joten Lauseen 6.2 sivulla 98 nojalla T on lineaarikuvaus $E \rightarrow F$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (T_n) on Cauchyn jono avaruudessa $\mathcal{L}(E, F)$, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että aina kun $n, m \geq n_0$, niin $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$. Jos $x \in E$ ja $\|x\| \leq 1$, niin silloin

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F \leq \|T_n - T_m\| \|x\|_E \leq \|T_n - T_m\| \leq \varepsilon.$$

Pitämällä piste $x \in E$ ja luku $n \in \mathbb{N}$ kiinteinä ja antamalla luvun m kasvaa rajatta tästä seuraa, että

$$\|T_n x - Tx\|_F = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_n x - T_m x\|_F \leq \varepsilon,$$

ja siis $\|(T_n - T)x\|_F \leq \varepsilon$ aina, kun $n \geq n_0$ ja $x \in B_E$. Näin ollen kuvaus $T_{n_0} - T$ on jatkuva, joten myös

$$T = T_{n_0} - (T_{n_0} - T)$$

on jatkuva. Operaattorinormin ja viimeisimmän arvion nojalla määritelmän nojalla

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$, joten jono (T_n) siis suppenee avaruudessa $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$. Siispä $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ on täydellinen. \square

Operaattorien avaruuksissa on myös algebrallista rakennetta, sillä voimme määritellä operaattoritulon yhdistettynä kuvauksina. Seuraava lause sanoo saman formaalimmin.

6.7. Lause. *Olkoot E, F ja G normiavaruuksia. Olkoot $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ja $S \in \mathcal{L}(F, G)$ rajoitettuja lineaarisia operaattoreita. Silloin yhdistetty kuvaus $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ ja*

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Todistus. Jatkuvien kuvausten yhdiste on jatkuva ja myös lineaaristen kuvausten yhdiste on lineaarinen. Siispä $ST \in \mathcal{L}(E, G)$. Jos $x \in E$ ja $\|x\| \leq 1$, niin

$$\|STx\|_G = \|S(Tx)\|_G \leq \|S\| \|Tx\|_F \leq \|S\| \|T\|$$

ja siis $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$. □

Huomautus. Banachin avaruutta E sanotaan *Banachin algebraksi*, jos avaruuden E alkioille on määritelty tulo, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

ja lisäksi algebran ehdot: (seuraavassa $x, y, z \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$)

$$x(yz) = (xy)z, \quad (\text{tulon assosiatiivisuus}),$$

$$x(y+z) = xy + xz, \quad (\text{osittelulait}) \text{ ja}$$

$$(x+y)z = xz + yz,$$

$$(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y), \quad (\text{skaalarilla kertomisen ja tulon yhteys})$$

6.8. Esimerkki. a) Lauseiden 6.6 ja 6.7 nojalla $\mathcal{L}(E)$ on Banachin algebra, kun E on Banachin avaruus, normina on operaattorinormi ja tulona ST on kuvausten yhdistäminen.

b) Kun X on kompakti avaruus, niin $C(X)$ on Banachin algebra, kun normina on $\|\cdot\|_\infty$ ja tulona $(fg)(x) = f(x)g(x)$. (HT 9/2006)

6.9. Lause. *Olkoon $T: E \rightarrow F$ lineaarinen bijektio. Tällöin T^{-1} on lineaarinen ja*

$$(6.10) \quad T^{-1} \text{ jatkuva} \iff \text{on olemassa } \alpha > 0, \text{ jolle } \|Tx\| \geq \alpha \|x\|, \quad x \in E.$$

Todistus. Jos $x, y \in F$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, niin

$$T(\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y) = \lambda TT^{-1}x + \mu TT^{-1}y = \lambda x + \mu y = T(T^{-1}(\lambda x + \mu y)).$$

Koska T on bijektio, niin tästä seuraa, että $\lambda T^{-1}x + \mu T^{-1}y = T^{-1}(\lambda x + \mu y)$. Siispä T^{-1} on lineaarinen. Osoitetaan seuraavaksi (6.10).

” \Rightarrow ” Koska $T^{-1}x = \bar{0}$ joss $x = \bar{0}$, niin voidaan olettaa $E \neq \{\bar{0}\}$ ja $F \neq \{0\}$. Tällöin on siis olemassa sellainen $x \in E$, $x \neq 0$, jolle

$$0 < \frac{\|T^{-1}x\|}{\|x\|} \leq \|T^{-1}\|.$$

Siispä $0 < \|T^{-1}\| < \infty$, joten $\|T^{-1}\|^{-1}$ on hyvin määritelty. Jos nyt $x \in E$, niin $\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|Tx\|$, joten

$$\frac{\|x\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|Tx\|,$$

joka on voimassa kaikilla $x \in E$. Valitsemalla $\alpha = \|T^{-1}\|^{-1}$ seuraa väitteen tämä suunta.

” \Leftarrow ” Oletetaan, että $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ kaikilla $x \in E$. Jos $y \in F$, niin olkoon $x = T^{-1}y$. Silloin $Tx = y$ ja siis

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Tx\| = \frac{1}{\alpha}\|y\|,$$

joka on voimassa kaikilla $y \in F$. Siispä $\|T^{-1}\| \leq 1/\alpha < \infty$. \square

6.11. Seuraus. *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T: E \rightarrow F$ lineaarinen bijektio. Silloin T on homeomorfismi jos ja vain jos on olemassa sellaiset vakiot $\alpha, \beta > 0$, joille*

$$\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$$

kaikilla $x \in E$.

Todistus. Tämä seuraa välittömästi Lauseesta 2.26 sivulla 22 ja Lauseesta 6.9. \square

6.12. Huomautus. Jos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ toteuttaa Seurauksen 6.11 ehdot, niin sanomme, että T on lineaarinen *isomorfismi* ja että avaruudet E ja F ovat isomorfiset.

6.13. Lause. *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja olkoon $T \in \mathcal{L}(E, F)$ isomorfismi. Silloin E on täydellinen jos ja vain jos F on täydellinen.*

Todistus. Symmetrian mukaan riittää osoittaa väite vain toiseen suuntaan. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchyn jono avaruudessa F . Silloin

$$\|T^{-1}x_n - T^{-1}x_m\| \leq \|T^{-1}\| \|x_n - x_m\|$$

ja siis $(T^{-1}x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Cauchyn jono avaruudessa E . Koska E on täydellinen, niin $T^{-1}x_n \rightarrow y \in E$ ja siispä

$$\|x_n - Ty\| = \|T(T^{-1}x_n) - Ty\| \leq \|T\| \|T^{-1}x_n - y\| \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Täten myös F on täydellinen. \square

Jos normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat ekvivalentteja (kts. Määritelmä 2.9 sivulla 12), niin Lauseen 6.13 nojalla $(E, \|\cdot\|_1)$ on täydellinen jos ja vain jos $(E, \|\cdot\|_2)$ on täydellinen.

6.14. **Esimerkki.** a) Sturmin–Liouvilien yhtälöiden yhteydessä tarkastelimme normia

$$\|f\|_{H^1} = \left(\int_0^1 (|f'(x)|^2 + |f(x)|^2) dx \right)^{1/2}$$

ja normia

$$\|f\|_E = \left(\int_0^1 (|f'(x)|^2 p(x) + |f(x)|^2 q(x)) dx \right)^{1/2},$$

missä $0 < \delta \leq p, q \leq M < \infty$. Silloin osoitimme, että

$$\sqrt{\delta} \|f\|_{H^1} \leq \|f\|_E \leq \sqrt{M} \|f\|_{H^1}$$

ja siten $\|\cdot\|_{H^1}$ ja $\|\cdot\|_E$ määräävät avaruuteen H^1 saman topologian ja molemmat normit ovat täydellisiä.

b) Jos $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^p$ ja χ_I on välin I karakteristinen funktio, niin kuvaus

$$T: (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \chi_{[n, n+1)}(x)$$

määrää isomorfismin $T: \ell^p \rightarrow E$, missä E on avaruuden $L^p(\mathbb{R})$ aliavaruus. Itse asiassa, T on *isometria* eli $\|Tx\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|x\|_{\ell^p}$.

- c) Jos $p \neq q$, niin ℓ^p ei ole isometrinen avaruuden ℓ^q kanssa (todistus sivuutetaan). Samoin avaruus L^p on isometrinen avaruuden L^q kanssa $\iff p = q$.
- d) Jonoavaruus ℓ^2 on isomorfinen erään avaruuden L^q aliavaruuden kanssa, jos $q \geq 2$. Mutta jos $q < 2$, niin tämä ei päde. Näiden todistukset ovat epätriviaaleja ja sivuutetaan.
- e) Jokainen *separoituva* Banachin avaruus E on isomorfinen avaruuden $C(0, 1)$ aliavaruuden kanssa (ja tämänkin todistus sivuutetaan).

Todistamme seuraavaksi hyödyllisen laajennusominaisuuden jatkuville operaattoreille.

6.15. **Lause.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus (jota ei oleteta suljetuksi) sekä $T: M \rightarrow F$ jatkuva lineaarikuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva lineaarikuvaus $\hat{T}: \overline{M} \rightarrow F$, jolle $\hat{T}z = Tz$ kaikilla $z \in M$ ja $\|\hat{T}\| = \|T\|$.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$. Tällöin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, jolle $z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Jos $p, q \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\|Tx_p - Tx_q\| = \|T(x_p - x_q)\| \leq \|T\| \|x_p - x_q\|,$$

joten $(Tx_n) \subset F$ on Cauchyn jono. Koska F on Banachin avaruus, niin jonolla $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on raja-arvo $\hat{T}x \in F$. Havaitaan, että tämä raja-arvo on riippumaton

jonon (x_n) valinnasta. Tämä nähdään valitsemalla toinen jono $(y_n) \subset M$, jolle myös $z = \lim y_n$. Toistamalla edellinen päättely jonolle (z_n) löydetään rajaalkio $y = \lim Ty_n \in F$. Koska $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|z - z\| = 0$, niin kuvauksen T jatkuvuuden nojalla

$$\bar{0} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n - y_n) = \lim Tx_n - \lim Ty_n = \widehat{T} - y.$$

Siispä $y = \widehat{T}$. Päättelemme tästä, että raja-arvo

$$\widehat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n$$

riippuu vain pisteestä $z \in \overline{M}$ eikä lainkaan jonon valinnasta. Nyt siis \widehat{T} on kuvaus $\overline{M} \rightarrow F$. Jos $z \in M$ ja $x_n = z$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\widehat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tz,$$

joten \widehat{T} on kuvauksen T laajennus.

Osoitetaan nyt, että \widehat{T} on lineaarinen kuvaus $\overline{M} \rightarrow F$. Olkoon $x, y \in \overline{M}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$. Valitaan sellaiset jonot $(x_n) \subset M$, $(y_n) \subset M$, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Tällöin myös jono $(z_n) = (x_n + \alpha y_n) \subset M$ ja tämä jono suppenee kohti vektoria $x + \alpha y$. Siispä alkuosan perusteella

$$\widehat{T}(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n + \alpha y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha Ty_n = \widehat{T}x + \alpha \widehat{T}y.$$

Edellisessä käytimme operaattorin T lineaarisuutta sekä kolmioepäyhtälöä siihen, että raja-arvon voi jakaa kahteen osaan. Edellinen lasku siis osoittaa, että \widehat{T} on lineaarinen.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\|T\| = \|\widehat{T}\|$. Jos $z \in \overline{M}$, niin valitaan sellainen jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, että $z = \lim x_n$. Tällöin

$$\widehat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n.$$

Koska $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja kolmioepäyhtälön nojalla $\|x_n\| \rightarrow \|z\|$, niin

$$\|\widehat{T}z\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|x_n\| = \|T\| \|z\|,$$

joten \widehat{T} on jatkuva ja $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$. Jos $z \in M$, niin

$$\|Tz\| = \|\widehat{T}z\| \leq \|\widehat{T}\| \|z\|,$$

joten myös $\|T\| \leq \|\widehat{T}\|$.

Vielä on osoitettava kuvauksen \widehat{T} yksikäsitteisyys. Olettakaamme, että S on jatkuva lineaarinen kuvaus $\overline{M} \rightarrow F$, jolle $Sz = Tz$ kaikilla $z \in M$. Koska kuvaus $S - \widehat{T}$ on jatkuva $\overline{M} \rightarrow F$, niin jokaisella $z \in \overline{M}$ on voimassa

$$Sz - \widehat{T}z = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n - Tx_n = 0,$$

kunhan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ on jono, joka suppenee kohti pistettä z . Siispä $S = \widehat{T}$ kaikilla $z \in \overline{M}$ ja kuvaus \widehat{T} on siten yksikäsitteinen. \square

Lause 6.15 on eräs lineaarioperaattoreiden filosofian kulmakivistä. Esimerkkinä tarkastellaan Fourier-muunnosta.

6.16. Esimerkki. Jos $f \in L^1(\mathbb{R})$ on integroitava ja $k \in \mathbb{R}$, asetetaan

$$(F) \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx} dx \quad (\text{funktion } f \text{ Fourier-muunnos})$$

Koska $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)|$, kun $x, k \in \mathbb{R}$ on yllä mainittu integraali on hyvin määritelty kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R})$. Koska Fourier-sarjojen L^2 -teoria on kaikkein toimivin (luku 5), haluaisimme määritellä Fourier-muunnoksen myös kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ongelma: $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$, joten (F):n integraali ei ole määritelty kaikilla $f \in L^2(\mathbb{R})$ ¹¹. Mikä neuvoksi?

Ratkaisu: Oletetaan aluksi, että $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Tällöin voidaan todistaa Parsevalin identiteetin vastine

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

Toisin sanoen, kun $M = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, niin kuvaus $T : f \rightarrow \widehat{f}$ on lineaarinen isometria $\|\cdot\|_2$ -normissa. Lauseen 6.15 nojalla kuvaus T laajenee jatkuvaksi lineaarioperaattoriksi $\overline{M} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, missä itse asiassa $\overline{M} = L^2(\mathbb{R})$. Näin Fourier-muunnos \widehat{f} saadaan määriteltyä kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Tämä sama prosessi voidaan kuvata konkreettisemminkin. Jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, niin $f \chi_{[-n,n]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kaikilla $n > 0$. Lebesguen dominoidun suppenemisen lause implikoi, että $\|f \cdot \chi_{[-n,n]} - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$, joten Lauseen 6.15 nojalla

$$\widehat{f}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x)e^{-ikx} dx \quad \text{kaikilla } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

¹¹Esimerkiksi funktio $f(x) = \min\{1, |x|^{-1}\}$ kuuluu $L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$

NEUMANNIN SARJA

Jos E on Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(E)$ ja on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, sanomme usein, että T on *kääntyvä* (isomorfismin sijasta). Seuraavalla sovelluksissa hyödyllisellä menetelmällä, eli niin sanottulla *Neumannin sarjalla*, pystymme useissa tilanteissa selvittämään operaattorin kääntyvyyden ja jopa laskemaan käänteisoperaattorin T^{-1} . Merkitsemme avaruuden E identtistä operaattoria merkillä I , siis $Ix = x$ kaikilla $x \in E$. Edelleen operaattorin T iteraatteja merkitsemme $T^0 = I$, $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (k kappaletta).

6.17. Lause (Neumannin sarja). *Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(E)$ jatkuva lineaarikuvaus. Jos $\|T\| < 1$, niin operaattori $I - T$ on kääntyvä ja*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

missä yo. sarja on normisuppeneva avaruudessa $\mathcal{L}(E)$.

Todistus. Lauseen 6.7 nojalla $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ jokaisella $k \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k < \infty.$$

mikä suppenee, sillä $\|T\| < 1$ ja oikean puoleisin sarja on geometrinen sarja. Koska $\mathcal{L}(E)$ on Banachin avaruus (kts. Lause 6.6), niin Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla sarja

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T^k \in \mathcal{L}(E)$$

suppenee. Tarkastellaan nyt osasummia S_n . Koska

$$(I - T)S_n = I + T + \dots + T^n - (T + T^2 + \dots + T^{n+1}) = I - T^{n+1} = S_n(I - T),$$

niin $\|(I - T)S_n - I\| \leq \|T\|^{n+1} \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$ eli $(I - T)S = I$. Vastaavasti nähdään, että $S(I - T) = I$, eli S on operaattorin $I - T$ käänteisoperaattori. \square

6.18. Esimerkki. Palaamme jo johdantoluvussa sekä Banachin kiintopistelauseen yhteydessä tarkastelemaamme esimerkkiin (kts. Esimerkki 3.40 sivulla 45) eli tarkastelemme integraaliyhtälöä

$$(*) \quad f(x) + \int_0^1 K(x, t)f(t) dt = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

missä $K \in C([0, 1] \times [0, 1])$ on jatkuva ja $\|K\|_{\infty} < 1$. Osoitamme nyt käyttämällä Neumannin sarjaa, että jos $g \in C(0, 1)$, niin tällöin yhtälöllä (*) on

yksikäsitteinen ratkaisu $f \in C(0,1)$. Asetetaan

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad f \in C(0, 1).$$

Harjoituksissa olemme jo osoittaneet, että $T \in \mathcal{L}(C(0, 1))$ ja $\|T\| \leq \|K\|_\infty < 1$. Nyt voimme soveltaa Neumannin sarjaa operaattoriin $-T$, sillä $\|-T\| = \|T\| < 1$. Siispä operaattori $I+T = I-(-T)$ on kääntyvä, joten kirjoittamalla yhtälö (*) operaattorimuodossa ja käyttämällä operaattorin $I+T$ kääntyvyyttä ja Neumannin sarjaa saamme

$$(I + T)f = g \iff f = (I + T)^{-1}g = \sum_{k=0}^{\infty} (-T)^k g.$$

Sivutuotteena saimme ratkaisulle $f \in C(0, 1)$ konstruktion sarjana. Saatua sarjaa kannattaa verrata Banachin kiintopistelauseen antamaan konstruktion.

Koska kääntyvyys on algebrallinen ominaisuus, niin kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän kaikkien jatkuvien operaattoreiden joukossa. Tämä seuraa seuraavasta huomiosta.

Huomautus. Jos $S, T \in \mathcal{L}(E)$ ja molemmat kääntyviä, niin yhdistetty kuvaus ST on kääntyvä ja $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$, sillä $STT^{-1}S^{-1} = SS^{-1} = I$ ja $T^{-1}S^{-1}ST = T^{-1}T = I$.

Neumannin sarjan avulla voimme myös tarkastella, minkälainen joukko kääntyvien operaattoreiden joukko on topologisesti.

6.19. Lause. *Olkoon E Banachin avaruus. Tällöin*

- i) jos $T \in \mathcal{L}(E)$ on kääntyvä ja $S \in \mathcal{L}(E)$ toteuttaa arvion $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, niin tällöin $T - S$ on kääntyvä.*
- ii) kääntyvien operaattorien joukko $\{T \in \mathcal{L}(E) : T \text{ kääntyvä}\}$ muodostaa avoimen ryhmän avaruudessa $\mathcal{L}(E)$ operaattorintulon suhteen.*

Todistus. Koska $T \in \mathcal{L}(E)$ on kääntyvä, niin erotus $T - S$ voidaan esittää tulona $T - S = T(I - T^{-1}S)$. Oletuksen ja Lauseen 6.17 nojalla $\|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1$, joten Neumannin sarjan nojalla operaattori $I - T^{-1}S$ on kääntyvä. Siispä edellisen huomautuksen nojalla myös operaattoritulo $T(I - T^{-1}S) = T - S$ on kääntyvä. Tämä osoittaa väitteen *i*). Kohta *ii*) seuraa nyt edellisestä huomiosta, että kääntyvät operaattorit muodostavat ryhmän ja kohdasta *i*), jonka nojalla kääntyvien operaattorien joukko on avoin. \square