5. Fourier-sarjat

Fourier esitti vuonna 1822 lämmönjohtamista koskevien tutkimusten yhteydessä kuuluisan menetelmänsä esittää mielivaltainen 2π-jaksollinen funktio kehitelmänä

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + c_2 e^{2ix} + \cdots .$$

Tästä nousee useita tärkeitä kysymyksiä, esimerkiksi suppeneeko sarja kohti funktiota f ja missä mielessä suppeneminen tapahtuisi? Lisäksi voidaan kysyä, määrääkö Fourier-sarja funktion f yksikäsitteisesti ja miten kertoimet c_n kuvaavat funktion f ominaisuuksia ? Nämä kysymykset ovat olleet keskeisiä (koko) analyysin kehityksessä. Tutkimme seuraavaksi, mitä voidaan Hilbertin avaruus-metodeilla tässä tapauksessa saada aikaan.

Esitarkasteluja. Olkoon $L^2 = L^2(0,2\pi)$ ja $f \in L^2$. Kun $n \in \mathbb{Z}$, on f:n n:s *Fourier kerroin* mukavinta määritellä kaavalla

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x.$$

Nimittäin, jos

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n \left(\cos(nx) + i \sin(nx)\right),$$

eli f on *trigonometrinen polynomi*, tällöin

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x = \widehat{f}(n)$$

kuten summauksen ja integroinnin järjestyksen vaihtamalla helposti huomaa.

Fourier-kertoimet liittyvät tietysti myös ortonormaaliin jonoon

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5.1}$$

Nimittäin

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{e^{inx}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f \mid e_n \right)$$

Tässä sisätulo $(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$ on otettu avaruudessa $L^2(0,2\pi)$.

Jos $f \in L^2$ (tai jos $f \in L^p(0,2\pi)$, $1 \le p < \infty$), sen n:s *Fourier-osasumma* on

$$s_n(x) \equiv s_n(f;x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad x \in [0,2\pi],$$

Huomaa, että summafunktio $s_n(f;x)$ on *pisteittäin* määritelty, koska funktio e^{ikx} on jatkuva kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

5.2. **Lemma.** *Fourier-osasummalle s_n on integraaliesitys*

$$s_n\,(f;x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,\mathrm{d}t,$$

missä

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(x/2\right)}$$

on n:s Dirichlet'n ydin, *kun $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Fourier-kertoimen $\widehat{f}(n)$ määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
s_n\,(f;x) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\,e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t\Big)\,e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\Big(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,D_n(x-t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

kun merkitään

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n}\left(e^{ix}\right)^k.$$

Soveltamalla geometrisen summan kaavaa saadaan

$$D_n(x) = e^{-inx}\left(\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}},$$

joten kertomalla edellinen identiteetti puolittain termillä $e^{-ix/2}(e^{ix}-1)$, saadaan

$$\left(e^{ix/2}-e^{-ix/2}\right)D_n(x) = e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}.$$

Eulerin kaava $e^{iz}-e^{-iz} = 2i\sin z$ antaa lopuksi

$$2i\sin(x/2)D_n(x) = 2i\sin\left((n+\tfrac{1}{2})x\right).$$

□

5.3. **Lemma.** *Olkoon*

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x).$$

Tällöin

i) kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \textit{ja}$$

ii) funktio $K_n(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0,2\pi]$. Lisäksi

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)},$$

kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta$.

Huomautus. Aritmeettinen keskiarvo K_n on n:s *Fejérin ydin*. Ominaisuus (ii) kertoo, että Fejérin ytimet K_n ovat positiivisia ja $K_n \to 0$ tasaisesti, kun $n \to \infty$, kunhan x ei ole lähellä päätepisteitä 0 tai 2π. Dirichlet ytimillä D_n ei ole näitä ominaisuuksia. Tästä syystä Fourier-sarjojen *pisteittäisen* suppenemisen teoria on vaikeaa!

Todistus.

$i)$ Koska

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,0},$$

on

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,\mathrm{d}x = 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siispä sama väite pitää paikkaansa Dirichlet'n ytimien aritmeettiselle keskiarvolle K_n.

$ii)$ Edellä osoitimme, että $(e^{ix}-1)D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}$. Tämän vuoksi

$$(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) = (e^{-ix}-1)\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}\right).$$

Yhtälön oikean puolen summa on kaksi geometrista summaa, joten edelleen hieman sieventämällä saadaan

$$\begin{aligned}(n+1)K_n(x)(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) &= -e^{i(n+1)x} + 1 - e^{-i(n+1)x} + 1\\ &= 2 - 2\cos\left((n+1)x\right).\end{aligned}$$

Koska $\left(e^{ix}-1\right)\left(e^{-ix}-1\right) = 2\left(1-\cos x\right)$, saamme lopuksi

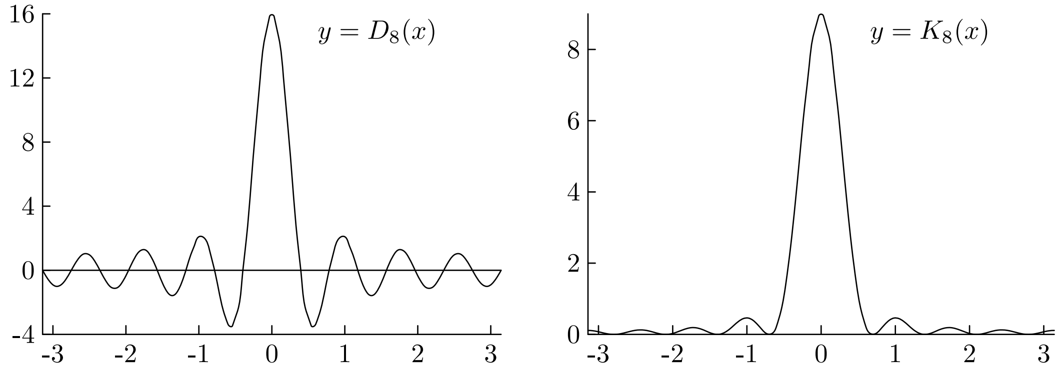
$$K_n(x) = \frac{1-\cos\left((n+1)x\right)}{(n+1)(1-\cos x)} \geq 0$$

Huomaa, että koska $\cos(t) \leq 1$ kaikilla t, Fejérin ydin on tosiaankin positiivinen. Edelleen, Fejérin ytimelle löydetystä esityksestä seuraa että

$$K_n(x) \leq \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}$$

kun $0 < \delta < x < 2\pi - \delta < 2\pi$.

□



KUVA 8. Dirichlet'n ja Fejérin ytimet ($n = 8$)

Seuraavaksi tutkimme Fejérin ytimien käyttäytymistä konvoluutioissa.

5.4. **Lause.** *Olkoon* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *jatkuva,* $f(0) = f(2\pi)$*, sekä*

$$K_n * f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, \mathrm{d}t$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ *ja* $n \in \mathbb{N}$*. Silloin*

$$\| K_n * f - f \|_\infty = \sup_{x \in [0,2\pi]} |K_n * f(x) - f(x)| \to 0,$$

eli $K_n * f(x) \to f(x)$ tasaisesti*, kun* $n \to \infty$*.*

Todistus. (vrt Reaalianalyysi I) Oletuksen nojalla f on tasaisesti jatkuva ja se voidaan jatkaa 2π-periodisena koko reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$. Myös K_n on 2π-periodinen ja jatkuva, joten muuttujanvaihtoa $u = x - t$ soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} K_n * f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, K_n(x-t)\, \mathrm{d}t \overset{u=x-t}{=} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u)\, K_n(u)\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)\, K_n(t)\, \mathrm{d}t \quad (= f * K_n(x)) \end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin löytyy sellainen $\delta > 0$, että

$$|f(x-u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikilla $|u| < \delta$ ja $x \in [0, 2\pi]$. Merkitään

$$M = \sup_{u \in (0,2\pi)} |f(u)| < \infty.$$

Lemman 5.3 kohdan *ii*) nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$0 \le K_n(u) < \frac{\varepsilon}{4M},$$

kun $\delta \le u \le 2\pi - \delta$ ja $n \ge n_0$. Lemman 5.3 kohdan *ii*) ja konvoluutiokaavan $K_n * f = f * K_n$ avulla saadaan nyt

$$\begin{aligned}|K_n * f(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x-u) - f(x))\ K_n(u)\,\mathrm{d}u \right| \\ &\le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-u) - f(x)|\ K_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{\int_0^{\delta} \cdots + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \cdots}_{=I_1} + \underbrace{\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \cdots}_{=I_2}\end{aligned}$$

Käsittelemme erikseen integroinnit yli edellä määrättyjen välien. Nyt Lemman 5.3 kohdan *i*) ja vakion δ määritelmän nojalla nojalla

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Koska f ja K_n ovat 2π-periodisia, niin tästä seuraa, että $|I_1| \le \varepsilon/2$. Vielä tulee käsitellä termi I_2. Nyt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad \le 2\Big(\sup_{[0,2\pi]} |f(x)| \Big) \sup_{[-\delta,2\pi-\delta]} K_n(x) \le 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Siispä jokaisella $x \in [0, 2\pi]$ on voimassa $|K_n * f(x) - f(x)| \le I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, joten väite seuraa. □

Huomautus. Lemmojen 5.2 ja 5.3 sekä integraalin lineaarisuuden nojalla

$$K_n * f(x) = \Big(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k \Big) * f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k * f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(f; x)$$

kun $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Lause 5.4 tunnetaan *Fejérin lauseen* nimellä. Lauseen 5.4 perusteella jatkuvan 2π-periodisen funktion f Fourier-osasummien *aritmeettinen keskiarvo* suppenee tasaisesti kohti f:ää välillä $[0, 2\pi]$ ja siten myös *pisteittäin* kaikilla $x \in [0, 2\pi]$.

Seurauksena tästä saadaan tärkeä yksikäsitteisyysominaisuus.

5.5. **Seuraus.** *Jos $f \in C\,(0, 2\pi)$ on 2π-periodinen ja $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $f \equiv 0$.*

Todistus. Jos $\widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, niin $s_n(f; x) = \sum \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla $f(x) = \lim K_n * f(x) = 0$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$. □

Siis jatkuvien funktioiden tapauksessa Fourier-kertoimet määräävät funktion eli jos f ja g ovat jatkuvia ja 2π-periodisia, niin $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f = g$.

Todistamme seuraavaksi keskeisen approksimaatiotuloksen L^p-funktioille.[5] Tämä tulos kertoo sen, että sileät funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^p[0, 2\pi]$, kun $p \neq \infty$.

5.6. **Lause.** *Olkoon $f \in L^p[0, 2\pi]$, kun $1 \leq p < \infty$, ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa 2π-periodinen C^∞-funktio g, jolle*

$$\text{(A)} \qquad \| f - g \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Todistus. Havaitaan, että $K_n * g$ on C^∞-funktio, sillä se on Lauseen 5.4 jälkeisen huomautuksen nojalla äärellinen summa trigonometrisistä funktioista, jotka ovat C^∞-funktioita.

Lauseen 5.4 nojalla riittää siis löytää *jatkuva* funktio g, jolle (A) on voimassa, sillä

$$\| f - K_n * g \|_p \leq \| f - g \|_p + \| g - K_n * g \|_p,$$

missä

$$\| g - K_n * g \|_p = \left(\int_0^{2\pi} |g(x) - K_n * g(x)| \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \| g - K_n * g \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Etsitään haluttu jatkuva funktio g ”asteittain”:

1.) Olkoon $f = \chi_F$ *suljetun* joukon $F \subset [0,2\pi]$ karakteristinen funktio. Asetetaan

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + n \operatorname{dist}(x, F)}, \qquad \text{kun } x \in [0, 2\pi] \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Etäisyysfunktio $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$ on jatkuva (tarkista!), joten $g_n \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $g_n(x) = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jos $x \in F$ ja $g_n(x) \to 0$, kun $x \notin F$ ja $n \to \infty$, sillä tällöin $\operatorname{dist}(x, F)) > 0$. Siis $g_n \to \chi_F$ pisteittäin, kun $n \to \infty$. Koska $0 \leq g_n(x) \leq 1$ kaikilla $x \in [0, 2\pi]$ ja $n \in \mathbb{N}$, niin Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \| g_n - \chi_F \|_p^p &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} |g_n(x) - \chi_F(x)|^p \,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Lisäksi muuttamalla funktiota g_n pienessä välissä $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ voi olettaa että $g_n(0) = g_n(2\pi)$.

[5] Vertaa Reaalianalyysi I

tähän tulee kuva!!

2.) Olkoon $f = \chi_A$ avoimen joukon $A \subset [0, 2\pi]$ karakteristinen funktio. Tämä seuraa kohdasta 1.), koska komplementti $A^c = [0, 2\pi] \setminus A$ on suljettu ja $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$.

3.) Olkoon $f = \chi_A$, kun $A \subset [0, 2\pi]$ Lebesgue-mitallinen joukko. Tällöin Lebesguen mitan määritelmä nojalla löytyy sellainen jono avoimia joukkoja $G_n \subset [0, 2\pi]$, että

$$G_n \supset A \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(G_n \setminus A) = 0,$$

kun μ on Lebesguen mitta. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ niin suureksi, että $\mu(G_n \setminus A) < (\varepsilon/2)^p$. Edelleen kohdan 2.) nojalla löytyy sellainen jatkuva 2π-periodinen funktio g, jolle $\| g - \chi_{G_n} \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Siispä

$$\| g - \chi_A \|_p \leq \| g - \chi_{G_n} \|_p + \| \chi_{G_n} - \chi_A \|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu(G_n \setminus A)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4.) Olkoon $f \in L^p(0, 2\pi)$ mielivaltainen. Tällöin Lebesguen integraalin määritelmä nojalla löytyy sellainen yksinkertainen funktio

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

että $\| f - g \|_p < \varepsilon$. Soveltamalla kohtaa 3.) kuhunkin karakteristiseen funktioon χ_{A_j} löydetään sellainen jatkuvat 2π-periodiset funktiot g_j, että

$$\| \chi_{A_j} - g_j \|_p < \frac{\varepsilon}{nM},$$

missä $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$. Siispä kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \Big\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j \Big\|_p &\leq \| f - g \|_p + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \| g_j - \chi_{A_j} \|_p \\ &< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \frac{\varepsilon}{nM} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $\sum a_j g_j$ on myös 2π-periodinen jatkuva funktio, väite seuraa.

$\square$

5.7. *Huomautus.*

1) Lauseen 5.6 nojalla sileiden C^∞-funktioiden muodostama aliavaruus on tiheä myös avaruudessa $L^p(a,b)$, kun $a < b$ ja $1 \le p < \infty$, mikä seuraa lineaarisesta ”muuttujanvaihdosta” $[a,b] \to [0,2\pi]$.

2) Lause 5.6 *ei päde* tapauksessa $p = \infty$ (HT).

3) Jos $f \in L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$ ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa sellainen $M > \infty$, että
$$\int_{J_M} |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \varepsilon,$$
kun $J_M = \{|x| > M\}$. Siispä vektorialiavaruus $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbb{R})$, kun $1 \le p < \infty$.

4) Jos $\Omega \subset \mathbb{R}$ on mitallinen, $\mu(\Omega) > 0$ ja $f \in L^p(\Omega)$, niin asetetaan $\widetilde{f} = f \cdot \chi_\Omega$ eli
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \Omega, \end{cases}$$
jolloin $\widetilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$. Tämän avulla voidaan päätellä, että $C^\infty|_\Omega$ on tiheä avaruudessa $L^p(\Omega)$, kun $1 \le p < \infty$.

5) Voidaan myös osoittaa, että p-integroituvat $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funktiot muodostavat tiheän aliavaruuden avaruudessa $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$, katso Reaalianalyysi I, luku 2.4. (n-ulotteinen tapaus on vähän hankalampi, koska käytimme edellä Fejérin ytimien $K_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k$ erikoisominaisuuksia).

Saadaan yksikäsitteisyys myös L^2-funktioiden Fourier-sarjoille:

5.8. **Seuraus.** *Jos $f \in L^2(0,2\pi)$ ja*
$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = 0 \quad \textit{kaikilla } k \in \mathbb{Z},$$
niin $f = \bar{0}$. Erityisesti, jos
$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [0,2\pi], n \in \mathbb{Z},$$
niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta avaruudessa L^2.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Lauseen 5.6 nojalla on olemassa sellainen *jatkuva* $g \in C(0,2\pi)$, että g on 2π-periodinen ja $\| f - g \|_2 < \varepsilon$.

Lauseen 5.4 sivulla 76 mukaan konvoluutio $K_n * g \to g$ *tasaisesti* välillä $[0,2\pi]$, kun $n \to \infty$, joten
$$\| g - K_n * g \|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| g - K_n * g \|_\infty < \varepsilon$$

jollakin $n \in \mathbb{N}$. Sivun 77 huomautuksen nojalla

$$K_n * g = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \qquad \text{(trigonometrinen polynomi)},$$

missä $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Koska $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ortonormaali jono, niin Huomautuksen 4.35 sivulla 66 nojalla

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 \le \Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2 .$$

Tästä kolmioepäyhtälön ja edellisten arvioiden nojalla seuraa, että

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} (\, f \,|\, e_k \,)\, e_k \Big\|_2 \le \|\, f - g \,\|_2 + \Big\| g - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \Big\|_2 < 2\varepsilon.$$

Oletuksen nojalla $(\, f \,|\, e_k \,) = \sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, joten $\|\, f \,\|_2 < 2\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $f = \bar{0}$.

Lauseen 4.39 sivulla 67 ehdon b) nojalla jono $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$. □

Yhteenveto (Fourier-sarjojen L^2-teoriasta)

Kokoamme lyhyesti saamamme tulokset Fourier-sarjojen L^2-teoriasta.

1.) Jos $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, niin $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali jono avaruudessa L^2.

2.) Jos $f \in L^2$ ja $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\, f \,|\, e_n \,) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin $f = \bar{0}$. (Seuraus 5.8)

3.) Jos $f \in L^2$, niin

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\, f \,|\, e_n \,)\, e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

missä sarja suppenee L^2-*mielessä*. Konkreettisesti

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Big| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \Big|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

(Lause 4.39 sivulla 67 ja Seuraus 5.8)

4.) Parsevalin identiteetin eli Lauseen 4.39 sivulla 67 kohdan e) nojalla

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2, \quad \text{kun } f \in L^2,$$

koska $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\, f \,|\, e_n \,)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

5.) Kääntäen, jos $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, niin tällöin on olemassa $f \in L^2(0,2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = \lambda_k \quad \text{kaikilla } k \in \mathbb{Z}.$$

Tämä on Riesz–Fischerin lause eli Seuraus 4.37 sivulla 67.

Pisteittäisen suppenemisen teoriasta esitämme seuraavan sovelluksen, joka toimii esimerkiksi jatkuvasti derivoituville funktioille.

5.9. **Lause.** *Jos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on 2π-periodinen ja toteuttaa Lipschitz-ehdon $|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, niin*

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} \to f(x),$$

kun $n \to \infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todistus. Jos $h \in L^2$, niin Besselin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} h(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\big((\, h \mid e^{in\cdot}\,) + (\, h \mid e^{-in\cdot}\,)\big)\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,((\, h \mid e_n\,) + (\, h \mid e_{-n}\,)) \to 0,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$. Samoin

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} h(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Valitaan nyt

$$h_x(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)}. \tag{*}$$

Tällöin Lipschitz-ehdon nojalla funktio $h_x \in L^\infty[0,2\pi] \subset L^2[0,2\pi]$. Lemman 5.2 nojalla

$$\begin{aligned}&S_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)\left(f(x-t) - f(x)\right)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Toinen identiteeteistä seuraa Lauseen 5.4 sivulla 76 todistuksessa olevasta konvoluutiokaavasta ja viimeinen siitä, että Lemman 5.3 sivulla 74 nojalla Dirichletin ytimen intgraali $\frac{1}{2\pi}\int D_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Koska

$$D_n(t) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{\sin(t/2)} = \cos(nt) + \frac{\sin(nt)\cos(t/2)}{\sin(t/2)},$$

niin soveltamalla edellisiä identiteettejä yhteen saadaan

$$\begin{aligned} S_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt)\,(f(x-t) - f(x))\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_x(t)\cos(t/2)\sin(nt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Koska kiinteällä $x \in \mathbb{R}$ sekä $f(x-\cdot) - f(x) \in L^2$ että $h_x(t)\cos(t/2) \in L^2$, niin todistuksen alkuosan kahden raja-arvokaavan perusteella

$$\lim_{n\to\infty} |S_n(f;x) - f(x)| = 0.$$

□

Sobolev-avaruudet

Olkoon $f \in C^1(0, 2\pi)$ jatkuvasti derivoituva, $f(0) = f(2\pi)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \Big/_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} \\ &+ \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = ik\widehat{f}(k), \end{aligned}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Joten Parsevalin identiteetin (Lause 4.39 sivulla 67) nojalla

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(t)|^2 + |f'(t)|^2)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2. \tag{5.10}$$

Riesz–Fischerin lause (Seuraus 4.37 sivulla 67) vihjaa, että kaava (5.10) voisi olla voimassa yleisemmille funktioille f ja että on olemassa avaruuden L^2 vastine derivoituville funktioille; siis avaruus, joka koostuu funktioista $f \in L^2$, joille $f' \in L^2$.

Ongelma. Mikä on "derivaatta" f', jos $f \in L^2$?

Tarkastellaan aluksi *testifunktioiden avaruutta* $\mathscr{D}(\Omega)$, missä $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ on avoin väli (voi olla $\Omega = \mathbb{R}$). Palautetataan mieleen, että jos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\mathrm{supp}(\psi) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \psi(x) \neq 0\}}$$

on ψ:n *kantaja.* Asetetaan nyt

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) :\ \mathrm{supp}(\psi) \subset \Omega \text{ on kompakti } \}.$$

Huomautus. Jos $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin sen derivaatat $\psi^{(k)} \in \mathscr{D}(\Omega)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Olkoon $f \in C^1(\Omega)$ jatkuvasti derivoituva. Tällöin osittaisintegroinmalla saadaan

$$\int_\Omega f'\varphi\,dx = -\int_\Omega f\varphi'\,dx \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{5.11}$$

Edellisessä identiteetissä ei ole sijoitustermiä, sillä testifunktio φ on häviää joukon Ω reunalla.

Identiteetin (5.11) avulla voimme samaistaa derivaatan f' ja sitä vastaavan *lineaarikuvauksen*

$$L_{f'} : \varphi \mapsto -\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

missä $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ ja $f \in C^1(\Omega)$. Seuraavksi näytämme, että samaistus on järkevä (eli jos tunnemme lineaarikuvauksen $L_{f'}$, niin voimme selvittää funktion f' yksikäsitteisesti 0-mittaista joukkoa vaille).

5.12. **Lemma.** *Olkoon $f \in C^1(\Omega)$ ja Ω rajoitettu avoin väli. Jos $g \in L^2(\Omega)$ ja*

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x \quad \textit{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

niin $f'(x) = g(x)$ m.k. $x \in \Omega$.

Todistus. Oletuksen ja identiteetin (5.11) nojalla

$$\int_\Omega g\,\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f'\varphi\,\mathrm{d}x,$$

eli

$$\int_\Omega (f'-g)\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Siis $(f'-g) \perp \mathscr{D}(\Omega)$ avaruudessa $L^2(\Omega)$.

Riittää siis näyttää, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ normin $\|\cdot\|_2$ suhteen, sillä tällöin testifunktioiden ortokomplementti $\mathscr{D}(\Omega)^\perp = \bar{0}$, joten $f' = g$ avaruuden $L^2(\Omega)$ alkioina.

Olkoon $\Omega = (0,1)$ (yleinen tapaus $\Omega = (a,b)$ voidaan palauttaa tähän lineaarisella muunnoksella). Etsimme kiinteällä $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ funktion $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, jolle pätee

1. kun $x \in \Omega$, niin $0 \le \eta_\varepsilon(x) \le 1$,
2. nollan ja ykkösen ympäristöissä funktio η_ε on identtisesti nolla, eli $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$, kun $0 < x < \varepsilon$ tai $1-\varepsilon < x < 1$,
3. funktio $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$, kun $2\varepsilon < x < 1-2\varepsilon$

Tämän etsiminen jää harjoitustehtäväksi. Voit käytää apuna tietoa, että

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

on C^∞-funktio, vrt. Reaalianalyysi I.

Jos $f_0 \in C^\infty(\Omega)$, niin $\eta_\varepsilon f_0 \in \mathscr{D}(\Omega)$ ja Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen nojalla

$$\| f_0 - \eta_\varepsilon f_0 \|_2 = \int_0^1 |1 - \eta_\varepsilon(x)|^2 |f_0(x)|^2 \, \mathrm{d}x \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0^+$. Koska Lauseen 5.6 sivulla 78 nojalla tiedetään, että $\overline{C^\infty(\Omega)} = L^2(\Omega)$, niin edellisen nojalla myös $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$. $\square$

Huomautus. Lemman 5.12 todistus toimii sellaisenaan vain, jos $f' \in L^2(\Omega)$. Tämä "lisärajoitus" voidaan helposti kiertää, sillä jos $\Omega_j \subseteq \Omega$ on kompakti, niin soveltamalla todistusta derivaatan f' rajoittumaan kompaktiin joukkoon Ω_j nähdään, että $f' = g$ m.k $x \in \Omega_j$. Siirtyminen kompakteihin joukkoihin takaa, että jatkuva funktio on neliöintegroituva. Valitsemalla jono kompakteja osajoukkoja $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega$ siten, että $\Omega = \bigcup \Omega_j$, niin edellisestä seuraa, että $f' = g$ m.k. $x \in \Omega$.

5.13. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a, b)$ avoin väli ja $f \in L^2(\Omega)$. Funktio $g \in L^2(\Omega)$ on f:n *distribuutioderivaatta* (eli *heikko* tai *yleistetty* derivaatta), jos

$$L_g(\varphi) := \int_\Omega g \, \varphi \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega f \, \varphi' \, \mathrm{d}x = -L_f(\varphi') \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

5.14. *Huomautus.* Jos distribuutioderivaatta g on olemassa, niin g on yksikäsitteinen L^2-funktiona. Tämä seuraa soveltamalla Lemman 5.12 todistusta. Jos $f \in C^1(\Omega)$, niin identiteetin (5.11) nojalla $g = f'$ tavallisessa mielessä. Jos f:lla on distribuutioderivaatta, niin merkitään $g = f'$.

5.15. *Huomautus.* Yllä olevien heikkojen derivaattojen tarkastelu johtaa *distribuutioihin* (eli yleistettyihin funktioihin). Näihin joudutaan esimerkiksi seuraavista vaatimuksista:

(a) jokainen jatkuva funktio on distribuutio,

(b) distribuutioilla on *kaikkien* kertalukujen derivaatat, jotka ovat edelleen distribuutioita. Jos $f \in C^1$, niin distribuutioderivaatta = tavallinen derivaatta.

(c) derivaatan tavallisten laskusääntöjen tulee olla voimassa (distribuutioiden *tulo* on ongelma!).

(d) distribuutioilla tulee olla riittävän hyviä konvergenssin ominaisuuksia (rajaprosesseja varten).

Määritellään *distribuutio* lineaarikuvauksena $\Lambda\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. Jokainen jatkuva $f \in C(\Omega)$ määrää lineaarikuvauksen $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f(\varphi) \, dx$. Jos asetamme identiteetin (5.11) sivulla 84 motivoimana, että

$$\Lambda'(\varphi) = -\Lambda(\varphi'), \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

niin ehdot (b) ja (c) tulevat täytetyiksi. Kohtaa (d) varten testifunktioiden joukko $\mathscr{D}(\Omega)$ pitää varustaa sopivalla topologialla, jolloin distribuutiot ovat tarkalleen *jatkuvat* lineaarikuvaukset $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$. Tämän topologian määrittely sekä karakterisointi vaatii lisätarkasteluja, joten se sivuutetaan tällä kurssilla.[6]

5.16. **Esimerkki.** Olkoon $\Omega = (-1, 1)$ ja

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\textit{Heavisiden} \text{ funktio}).$$

Tällöin $H \in L^2(\Omega)$, mutta kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ pätee

$$-\int_{-1}^{1} \varphi'(x)H(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) - \underbrace{\varphi(1)}_{=0} = \varphi(0)$$

eikä voi olla olemassa funktiota $g \in L^2(\Omega)$, jolle

$$\int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \text{kaikilla } \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

5.17. *Huomautus.* Heavisiden funktion H derivaatta "distribuutiona" on ns. *Diracin deltafunktionaali* δ, jolle $\delta(x) = 0$ kun $x \neq 0$ ja $\int_\Omega \delta(x)\,dx = 1$. Siis δ ei voi olla tavallinen funktio, vaan se on *aito distribuutio*.

5.18. **Määritelmä.** Olkoon $\Omega = (a, b)$ avoin väli. *Sobolev-avaruus* $H^1 = H^1(\Omega)$ koostuu niistä avaruuden L^2 funktioista f, joilla on distribuutioderivaatta $f' \in L^2$ eli

$$H^1 = \{\, f \in L^2(\Omega) : \text{ funktiolla } f \text{ on distribuutioderivaatta } f' \in L^2(\Omega) \,\}.$$

Huomautus. Merkintä H^1 viittaa derivaatan kertalukuun ja H Hilbertin avaruuteen. Usein merkitään myös $H^1 = W_2^1 = W^{1,2}$.

5.19. **Lause.** *H^1 on Hilbert-avaruus varustettuna sisätulolla*

$$(\, f \mid h \,) = \int_\Omega f(x)\overline{h(x)} + f'(x)\overline{h'(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in H^1.$$

Todistus. HT 8/2006. □

Tarvitsemme myöhemmissä esimerkeissä Sobolev-funktioiden perusominaisuuksia ja näitä varten tarvitaan seuraava versio analyysin peruslauseesta heikoille derivaatoille.

[6]katso esimerkiksi Walter Rudin: "Functional Analysis".

5.20. **Lemma.** *Jos $f \in L^2(\Omega)$ ja $\int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x = 0$ kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, niin $f(x) \equiv C$ (vakio) m.k. $x \in \Omega$ eli joukko $\{\, x \in \Omega : \ f(x) \neq C \,\}$ on 0-mittainen.*

Todistus. Olkoon $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ funktio, jolle $\int_\Omega \psi\, dx = 1$. Jos $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen, niin asetetaan

$$\varphi(x) = \int_a^x \left(w(t) - \Big(\int_\Omega w(y)\,\mathrm{d}y \Big) \psi(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Tämän havaitsemiseksi lasketaan ensin φ derivaatta, joka on $\varphi'(t) = w(t) - (\int w\,\mathrm{d}x)\psi(t)$. Olkoon nyt väli $[c,d] \subset \Omega = (a,b)$ sellainen, että $\mathrm{supp}(\psi) \cup \mathrm{supp}(w) \subset [c,d]$, niin kaikilla $c' \in [a,c]$ on $\varphi(c') = 0$ ja edelleen

$$\begin{aligned} \varphi(d') = \varphi(d') - \varphi(c') = \int_{c'}^{d'} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{c'}^{d'} \left(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega w(t)\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \psi(t)\,\mathrm{d}t \cdot \int_\Omega w(x)\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

kaikilla $d' \in [d,b]$, sillä $\int \psi\,\mathrm{d}x = 1$. Siispä $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \Omega$ ja on kompakti.

Oletuksen ja Fubinin lauseen[7] nojalla on siis

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega f\,\varphi'\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(t) \left(w(t) - \Big(\int_\Omega w\,\mathrm{d}x \Big) \psi(t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega w(x) \left(f(x) - \int_\Omega f(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Koska $w \in \mathscr{D}(\Omega)$ on mielivaltainen ja $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$ (Lauseen 5.12:n todistus), niin tästä seuraa, että

$$f(x) - \underbrace{\int_\Omega f\,\psi\,\mathrm{d}t}_{=C=\text{vakio}} = 0 \qquad \text{m.k.} \quad x \in \Omega$$

□

Analyysin peruslauseen (Lemma 5.20) avulla voimme osoittaa, että Sobolev-funktiot ovatkin hieman sileitä myös tavallisessa mielessä. Tarkemmin sanoen seuraava tulos on voimassa.

5.21. **Lause.** *Jos $\Omega = (a,b)$ on rajoitettu väli, $f \in H^1(a,b)$ ja f' on sen distribuutioderivaatta, niin*

a) *f on jatkuva (tarkemmin: on olemassa $\widetilde{f} \in C(a,b)$, jolle $\widetilde{f}(x) = f(x)$ m.k. $x \in \Omega$ eli funktion f määräämä L^2-luokka sisältää jatkuvan* edustajan*)*

[7]integroimisjärjestyksen vaihto, kts. Mitta ja integraali

b)

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t + f(x_0) \qquad m.k. \quad x, x_0 \in (a,b)$$

Huomautus.

(1) Ominaisuus ”on olemassa jatkuva edustaja” on vahvempi kuin ominaisuus ”m.k. jatkuva”. Esimerkiksi välin $[0,1]$ karakteristinen funktio $\chi_{[0,1]}$ on jatkuva m.k. $x \in \mathbb{R}$, mutta ei ole olemassa sitä vastaavaa jatkuvaa edustajaa.

(2) Jos f on *jatkuva* funktio, jolle löytyy $f'(x)$ m.k. x (tavallisessa mielessä) ja $f' \in L^2(\Omega)$, niin tällöin b) *ei* aina päde (Reaalianalyysi I: on olemassa jatkuva ns. *Cantorin funktio* $f : [0,1] \to [0,1]$, jolle $f'(x) = 0$ m.k. $x \in [0,1]$, $f(0) = 0, f(1) = 1$).

Lauseen 5.21 todistus. Voidaan vapaasti olettaa, että $(a,b) = (0,1)$. Olkoon $x_0 \in (0,1)$. Määritellään funktio

$$h(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

joka on hyvin määritelty, sillä $f' \in L^2(0,1) \subset L^1(0,1)$ Schwarzin tai Hölderin epäyhtälön nojalla. Jos $x, y \in (0,1)$, niin Hölderin nojalla (jos $x < y$)

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f'(t)dt - \int_{x_0}^{y} f'(t)dt \right| = \left| \int_{x}^{y} f'(t)dt \right| \\ &\le \left(\int_{x}^{y} |f'(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_{x}^{y} 1dt \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|y-x|^{\frac{1}{2}}} \le \| f \|_{H^1} |x-y|^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

eli h on tasaisesti jatkuva $(0,1) \to \mathbb{K}$ ja siten myös jatkuva välillä $[0,1]$. *Väite:* $f(x) - h(x) = C$ (vakio) m.k. $x \in (0,1)$ (*Huom*: (a) ja (b) seuraavat tästä heti). Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ mielivaltainen ja olkoon $x_0 = 0$ (merkintöjen helpottamiseksi). Tällöin Fubinin lauseen, distribuutioderivaatan määritelmän sekä tiedon, että $\varphi(1) = 0$, saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi'(x) h(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varphi'(x) \left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 f'(t) \underbrace{\left(\int_t^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right)}_{=\varphi(1)-\varphi(t)=-\varphi(t)} \mathrm{d}t = -\int_0^1 f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

joten

$$\int_0^1 \varphi'(t)(h(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

kaikilla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Siispä Lemman 5.20 nojalla $f(x) - h(x) \equiv C$ m.k. $x \in (0,1)$. □

Seuraavassa oletetaan aina, että Sobolev-funktio $f \in H^1(a,b)$ on jatkuva (siis edustajana Lauseen 5.21 kohdan a) mielessä) ja erityisesti

$$f(a) = \lim_{x\to a+} f(x) \quad \text{ja} \quad f(b) = \lim_{x\to b-} f(x)$$

ovat olemassa (katso Lauseen 5.21 todistus). Siis tässä mielessä

$$H^1(a,b) \subset C(a,b)\,(= \{\, f\colon [a,b] \to \mathbb{K} : \ f \text{ on jatkuva} \,\}).$$

Kirjoitetaan näkyviin pari seurausta Lauseelle 5.21.

5.22. **Seuraus.** *Jos $f \in H^1(a,b)$ ja $f' \in C(a,b)$, niin $f \in C^1(a,b)$.*

Todistus. Lauseen 5.21 ja derivaatan f' jatkuvuuden nojalla

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$$

kaikilla $x_0, x \in [a,b]$. □

5.23. **Seuraus.** *Joukko $H_0^1(a,b) = \{\, f \in H^1(a,b) : \ f(a) = f(b) = 0 \,\}$ on avaruuden $H^1(a,b)$* suljettu *aliavaruus (ja siis Hilbert avaruus).*

Todistus. HT 9/2006 □

Huomautus. Koska avaruuden H^1 funktiot ovat jatkuvia, niin 2π-periodisessa tapauksessa $H^1(0,2\pi)$ voidaan karakterisoida Fourier-kertoimien avulla: eli funktio $f \in H^1(0,2\pi)$ ja $f(0) = f(2\pi)$ jos ja vain jos

$$f \in L^2(0,2\pi) \quad \text{ja} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)|\widehat{f}(k)|^2 < \infty.$$

Tämä seuraa sivulla 83 olevasta johdantotekstistä Sobolev-avaruuksiin, kun lisäksi yhdistämme tähän päättelyyn HT 9/2006 tehtävässä 2 osoitettua tulosta.

Sovelluksista differentiaaliyhtälöihin

Hilbertin avaruus-metodeja voidaan käyttää apuna myös differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Tarkastellaan esimerkkinä *Sturmin–Liouvillen* yhtälöitä: Oletetaan, että on annettu funktiot $p \in C^2(0,1)$, $q \in C(0,1)$ ja etsitään funktiota $u \in C^2(0,1)$, joka toteuttaa seuraavat ehdot

$$\text{(SL)} \qquad \begin{cases} -(p(x)u'(x))'(x) + q(x)u(x) = 0, & \text{kun } x \in (0,1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

Teemme seuraavat *lisäoletukset*: on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$p(x) \geq \delta \quad \text{ja} \quad q(x) \geq \delta \quad \text{aina, kun } x \in [0,1] \tag{5.24}$$

Seuraava tärkeä *heikkon ratkaisun* käsite kytkee yhteen differentiaaliyhtälöt ja Hilbertin avaruudet.

5.25. **Määritelmä.** Funktio $u \in H^1(0,1)$ on yhtälön (SL) *heikko ratkaisu*, jos $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ sekä

$$\int_0^1 p(x)\varphi'(x)u'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)\varphi(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

kaikilla testifunktiolla $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$.

Toisin sanoen, funktio u on Sturmin–Liouvillen yhtälön (SL) heikko ratkaisu, jos funktion pu' distribuutioderivaatta on qu. Todistamme nyt Hilbertin avaruusmenetelmillä seuraavan tuloksen, jonka tarkennuksiin palaamme myöhemmin kurssilla, kunhan olemme saaneet uusia ja tehokkaampia työkaluja.

5.26. **Lause.** *Kun p ja q ovat alhaalta rajoitettuja (eli kun ehto* (5.24) *toteutuu), niin yhtälöllä* (SL) *on yksikäsitteinen ratkaisu $u \in C^2(0,1)$.*

Todistus. Todistamme väitteen useissa pienissä askeleissa.
1. askel: Ensimmäisenä askeleen osoitetaan, että

Väite. *Jos $u \in C^2$ on yhtälön* (SL) *klassinen ratkaisu*[8]*, niin u on myös heikko ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 (p\,\varphi'\,u' + q\,u\varphi)(x)\,\mathrm{d}x &= \Big/_{0}^{1} p(x)\varphi(x)u'(x) \\ &\quad + \int_0^1 \varphi(x)\underbrace{\big(-(p\,u')' + q\,u\big)(x)}_{\equiv 0}\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Sijoitustermi häviää, sillä $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Siis u on Määritelmän 5.25 nojalla myös heikko ratkaisu. $\square$

2. askel: Asetetaan avaruuteen $H^1(0,1)$ uusi sisätulo

$$\langle\, u \,|\, v \,\rangle = \int_0^1 p(x)u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Selvästi $\langle\, u \,|\, v \,\rangle$ on funktion u suhteen lineaarinen, $\langle\, u \,|\, v \,\rangle = \overline{\langle\, v \,|\, u \,\rangle}$ ja lisäksi $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on aidosti positiviinen, sillä $p \geq \delta \geq 0$ ja $q \geq \delta \geq 0$. Siispä $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on todella sisätulo avaruudessa $H^1(0,1)$.

[8]siis $u \in C^2$ ja toteuttaa reuna-arvotehtävän (SL)

Väite. *Joukko* $H^1(0,1)$ *varustettuna sisätulolla* $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ *on Hilbertin avaruus.*

Todistus. On siis vielä näytettävä, että $H^1(0,1)$ on täydellinen normissa

$$||| u ||| := \sqrt{\langle u \mid u \rangle}.$$

Olemme olettaneet, että $\delta \le p, q$ ja koska p sekä q ovat jatkuvina funktioina rajoitettuja välillä $[0,1]$, niin jollakin vakiolla $M > 0$ on

$$0 < \delta \le p(x) \le M < \infty, \quad 0 < \delta \le q(x) \le M < \infty.$$

Nyt

$$\begin{aligned} ||| u - v |||^2 &= \int_0^1 p(x)|u'(x) - v'(x)|^2 + q(x)|u(x) - v(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\le M \int_0^1 |u'(x) - v'(x)|^2 + |u(x) - v(x)|^2 \,\mathrm{d}x = M \| u - v \|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Samoin nähdään, että $\delta \| u - v \|_{H^1}^2 \le ||| u - v |||^2$. Siis, jos (u_n) on Cauchyn jono avaruudessa $(H^1, ||| \cdot |||)$, niin se on Cauchyn jono myös avaruudessa $(H^1, \| \cdot \|_{H^1})$. Koska $(H^1, \| \cdot \|_{H^1})$ on täydellinen (Lause 5.19 sivulla 86), niin löytyy sellainen $u \in H^1$, että $\| u_n - u \|_{H^1} \to 0$, kun $n \to \infty$. Tällöin $||| u_n - u ||| \le M \| u_n - u \|_{H^1} \to 0$, ja siis myös avaruus $(H^1, ||| \cdot |||)$ on täydellinen. $\square$

3. askel: Seuraava askel on näyttää, kuinka yhtälölle (SL) löydetään heikko ratkaisu.

Väite. *Yhtälöllä* (SL) *on heikko ratkaisu.*

Todistus. Olkoon $E = (H^1, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, missä sisätulo $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ on sama kuin askeleessa 2. Nyt toisen askeleen mukaan avaruus E on Hilbertin avaruus. Valitaan nyt jokin $f \in E$, jolle $f(0) = \alpha$ ja $f(1) = \beta$, esimerkiksi funktio $f(x) = \alpha + x(\beta - \alpha)$ kelpaa. Seurauksen 5.23 sivulla 89 nojalla H_0^1 on avaruuden H^1 suljettu aliavaruus ja edelliseen askeleen todistuksen nojalla H_0^1 on myös avaruuden E suljettu aliavaruus. Siispä voimme soveltaa luvun 4 normin minimoijatuloksia ja siten Seurauksen 4.18 sivulla 60 nojalla on olemassa yksikäsitteinen $g \in H_0^1$, jolle

$$||| f - g ||| = \inf\{ \, ||| f - h ||| : \ h \in H_0^1 \, \}.$$

Edelleen Lauseen 4.20 sivulla 61 nojalla $(f - g) \perp H_0^1$ sisätulon $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ suhteen. Jos nyt merkitään $u = f - g$, niin

$$u(0) = f(0) - g(0) = \alpha - 0 = \alpha \quad \text{ja} \quad u(1) = f(1) - g(1) = \beta.$$

Koska selvästi $\mathscr{D}(0,1) \subset H_0^1(0,1)$, niin jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ on

$$0 = \langle\, f - g \,|\, \overline{\varphi} \,\rangle = \int_0^1 p(x)u'(x)\varphi'(x) + q(x)u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

eli funktio u on yhtälön (SL) heikko ratkaisu! □

Huomautus. Edellä esitetty heikon ratkaisun konstruointi voidaan tulkita myös *Dirichlét'n periaatteena*:

> ”Jos
> $$I(u) = \int_0^1 p(x)|u'(x)|^2 + q(x)|u(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$
> niin yhtälön (SL) heikko ratkaisu on funktio $u_0 \in H^1(0,1)$, joka toteuttaa reunaehdot $u_0(0) = \alpha$, $u_0(1) = \beta$ ja jolle pätee
> $$I(u_0) = \inf\{\, I(u) : \; u(0) = \alpha \text{ ja } u(1) = \beta \,\}.”$$

4. askel: Tässä askeleessa osoitamme, että yhtälöllä (SL) on korkeintaan yksi ratkaisu. Yhdessä edellisen askeleen kanssa tämä takaa sen, että yhtälöllä on tarkalleen yksi heikko ratkaisu. Tätä varten tarvitsemme seuraavan lemman, joka osoittaa, että testifunktiot ovat tiheässä avaruudessa H_0^1 (mutta eivät siis koko Sobolev-avaruudessa H^1 !!).

5.27. **Lemma.** *Testifunktioiden sulkeuma* $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, *kun* Ω *on rajoitettu väli ja sulkeuma otetaan* H^1*-normin suhteen.*

Todistus. Oletetaan seuraavassa laskujen yksinkertaistamiseksi, että $\Omega = (0,1)$. Ensiksi, sillä $\mathscr{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ja avaruus $H_0^1(\Omega)$ on suljettu, niin $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} \subset H_0^1(\Omega)$.

Kääntäen, jos $f \in H_0^1(\Omega)$, niin Lauseen 5.21 sivulla 87 nojalla

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Edelleen Lemman 5.12 sivulla 84 todistuksessa osoitettiin, että $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^2(\Omega)$, joten löytyy sellainen $g \in \mathscr{D}(\Omega)$, jolle $\|\, f' - g \,\|_2 < \varepsilon$. Koska väli $[0,1]$ on rajoitettu, niin tiedämme, että $\|\, f' - g \,\|_1 \leq \|\, f' - g \,\|_2 < \varepsilon$. Siten

$$(*) \qquad \Big| \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \Big| = \Big| \int_0^1 g(x) - f'(x)\,\mathrm{d}x \Big| \leq \|\, g - f' \,\|_1 < \varepsilon.$$

Ensimmäinen identiteetti seuraa siitä, että

$$0 = f(1) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Väitteen osoittamiseksi haluaisimme nyt konstruoida funktion $h \in \mathscr{D}(0,1)$, jolle sekä $\|\, f - h \,\|_2$ ja $\|\, f' - h' \,\|_2$ olisivat pieniä. Hyvä kandidaatti vaikuttaisi olevan funktion g integraalifunktio

$$(*) \qquad h(x) := \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Onko tämä integraalifunktio h kuitenkaan $\mathscr{D}(0,1)$:ssä? Jotta se olisi, on oltava $h(1) = 0$, mikä tarkoittaa, että vakio

$$\beta := \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

mutta me tiedämme vain arvion $(*)$. Korjataksemme tämän puutteen, valitsemme jonkin *kiinteän* testifunktion $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$, joka toteuttaa ehdot $\varphi \geq 0$, $\| \varphi \|_1 = 1$. Olkoon nyt funktio $\widetilde{g} := g - \beta\varphi$. Nyt $\widetilde{g} \in \mathscr{D}(0,1)$, sen integraali on nolla ja lisäksi arvion $(*)$ nojalla

$$\| g - \widetilde{g} \|_2 = |\beta| \, \| \varphi \|_2 < \varepsilon \| \varphi \|_2.$$

Voimme nyt vaihtaa funktion g funktioksi $\widetilde{g}$, joten voimme siis olettaa, että kaavan $(**)$ määräämä integraalifunktio $h \in \mathscr{D}(0,1)$. Nyt loppuosoitus on suoraviivainen, sillä

$$\begin{aligned}
\| f - h \|_{H^1}^2 &= \int_0^1 |f(x) - h(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - h'(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big| \int_0^x f'(t) - \widetilde{g}(t)\,\mathrm{d}t \Big|^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x) - \widetilde{g}(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 \Big(\int_0^x |f'(t) - \widetilde{g}(t)|\,\mathrm{d}t \Big)^2 \mathrm{d}x + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \\
&\leq \int_0^1 |f'(t) - \widetilde{g}(t)|^2\,\mathrm{d}t + \| f' - \widetilde{g} \|_2^2 \leq 2(1 + \| \varphi \|_2)^2 \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Toiseksi viimeinen arvio seuraa Cauchy–Schwarzin (tai Hölderin) epäyhtälön nojalla. Siispä $H_0^1(\Omega) \subset \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$. $\square$

Edeltävän lemman avulla voimme nyt osoittaa askeleen 4. väitteen:

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu on yksikäsitteinen.*

Todistus. Osoitimme 3. askeleessa, että jos $g \in H_0^1$ on se *yksikäsitteinen* alkio, jolle $f - g \perp H_0^1$, niin $u = f - g$ toteuttaa yhtälön (SL).

Kääntäen, jos u_1 toteuttaa yhtälön (SL), niin reunaehdon nojalla $u_1 = f - g_1$, missä $g_1 \in H_0^1(0,1)$. Heikon ratkaisun määritelmän nojalla $\langle u_1 \,|\, \varphi \rangle = 0$ jokaisella $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ eli $f - g_1 \perp \mathscr{D}(0,1)$. Mutta Lemman 5.27 mukaan $\overline{\mathscr{D}(0,1)} = H_0^1$, joten $f - g_1 \perp H_0^1$. Siispä Lauseen 4.20 sivulla 61 nojalla $\| f - g_1 \| = \operatorname{dist}(f, H_0^1)$, joten Lauseen 4.17 sivulla 59 nojalla $u_1 = f - g_1 = f - g = u$, joten ratkaisu on yksikäsitteinen. $\square$

5. askel: Viimeisenä askeleena osoitamme, että edellisissä askeleissa konstruoitu yksikäsitteinen heikko ratkaisu on lisäksi klassinen.

Väite. *Yhtälön* (SL) *heikko ratkaisu u on klassinen ratkaisu eli* $u \in C^2[0,1]$.

Todistus. Alkujaan tiedetään, että $u \in H^1$, joten $u' \in L^2(0,1)$. Koska $p \in C^2(0,1)$, niin tulo $pu' \in L^2(0,1)$. Koska tulon pu' distribuutioderivaatta on $qu \in L^2$, niin tiedämmekin siis, että $pu' \in H^1(0,1)$, joten Lauseen 5.21 nojalla funktio pu' on jatkuva. Edelleen, koska $p \geq \delta > 0$, niin $u' \in C(0,1)$, joten olemme johtaneet, että itse asiassa $u \in C^1(0,1)$.

Nyt $(pu')' = qu \in C(0,1)$ myös klassisessa mielessä, joten $pu' \in C^1(0,1)$, mistä seuraa edellleen, että $u \in C^2(0,1)$. □

Yhdessä kaikki askeleet osoittavat Lauseen 5.26 väitteen. □

Lisätietoja:

1. Sama koneisto voidaan rakentaa korkeammissakin dimensioissa ja L^p-avaruuksissa: kun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue ja $1 \leq p < \infty$, voidaan myös määritellä Sobolev-avaruus

$$W_p^1(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : f\text{:n heikot osittaisderivaatat } \partial_1 f, \ldots, \partial_n f \in L^p(\Omega)\}.$$

   Vastaavasti vaatimalla, että L^p-funktion f kaikkien korkeintaan astetta[9] k olevat heikot distribuutioderivaatat $\partial^\alpha f \in L^p$, voimme myös määritellä Sobelev-avaruudet $W_p^k(\Omega)$ sekä $H^k(\Omega) \equiv W_2^k(\Omega)$. Tällöin voidaan osoittaa Lauseen 5.21 sivulla 87 vastine eli erikoistapaus *Sobolevin upotuslauseesta*:

   > ”Jos $k > \frac{n}{2}$ ja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on riittävän sileäreunainen, niin $H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.”

2. Edellä esitetty Sturmin–Liouvillen yhtälöiden ratkaisumenetelmää voidaan soveltaa korkeammissa dimensioissa ns. *elliptisiin yhtälöihin*, joiden prototyyppi on

$$\begin{cases} -\triangle u + u = 0, \\ u|\partial\Omega = f, \end{cases}$$

   missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on alue. Ratkaisumenetelmä toimii kuten edellä:
   i) Klassinen ratkaisu on heikko ratkaisu
   ii) On olemassa heikko ratkaisu
   iii) Heikko ratkaisu on yksikäsitteinen (joten myös klassinen ratkaisu on yksikäsitteinen)
   iv) Heikon ratkaisun u säännöllisyys, eli $u \in C^2$

[9] sanomme, että $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f$ on astetta k, jos $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$

Tästä yhtälöstä päästään *Laplacen yhtälöön* $\triangle u = 0$ Fredholm-operaattoreiden tai Fredholmin teorian avulla. Siis tässä luovumme oletuksesta, että $q \geq \delta > 0$!!

3. Historiallisesti, Bernhard Riemann (1826–1866) ratkaisi yhtälön $\triangle u = f$ juuri edellä mainitun Diriclét'n periaatteen avulla. Karl Weierstraß (1815–1897) aiheutti suuren sensaation kriittisellä artikkelillaan "Über das Sogerannte Dirichletsche Princip", jossa hän esitti seuraavan vastaesimerkin: Jos

$$J(u) = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

niin ei ole jatkuvaa funktiota u_0, jolle $u_0(1) = 1$, $u_0(-1) = -1$ ja

$$J(u) = \inf\{\ J(u) : \ u(-1) = 1, u(1) = -1\ \}$$

Todistus. Jos

$$\varphi(x) = \frac{\arctan \frac{x}{\varepsilon}}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,$$

niin

$$\varphi'(x) = \frac{\varepsilon}{(\arctan \frac{1}{\varepsilon})(x^2 + \varepsilon^2)},$$

joten

$$J(\varphi) < \frac{2\varepsilon}{\arctan \frac{1}{\varepsilon}} \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0^+$. □

Missä Vika ! ? Miksi Dirichlét'n periaate ei toimikaan? Syy (joka ymmärrettiin vasta paljon myöhemmin 1900-luvulla) on se, ettei H^1 (tai H_0^1) ole täydellinen normissa

$$\| u \| = \int_{-1}^{1} x^2 |u'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Tästä samasta syystä oletettiin, että $p, q \geq \delta$ yhtälössä (SL).[10] Weierstrassin kritiikillä on ollut huomattava merkitys differentiaaliyhtälöiden teorialle ja variaatiolaskennalle, vaikka Dirichlét'n periaate nyt pystytään perustelemaan täsmällisesti Hilbertin avaruuksien teorian avulla.

[10]tämä normi vastaa Sturmin–Liouvillen yhtälöiden normia, kun $q \equiv 0$ ja $p(x) = x^2$!! Koska aikaisemmin totesimme, että oletuksesta $q \geq \delta$ voidaan luopua, niin se, että funktiolla p on vain yksi nollakohta muuttaa tilanteen radikaalisti !!