

3. TÄYDELLISYYS JA BANACHIN AVARUUS

Reaalilukujen joukko \mathbb{R} (varustettuna normilla $|x - y|$) eroaa ratkaisevasti rationaalilukujen joukosta \mathbb{Q} seuraavan ominaisuutensa perusteella: reaalilukujono x_n suppenee joss (x_n) on Cauchyn jono. Tätä reaalilukujen joukon \mathbb{R} ominaisuutta sanotaan täydellisyysdeksi. Toisena esimerkkinä mainitaan avaruus

$$E = \{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ on Riemann-integroituva} \}$$

varustettuna seminormilla

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E.$$

Avaruus $(E, \|\cdot\|_1)$ ei ole täydellinen (todistus sivuutetaan); tämä puute oli eräs keskeisistä syistä Lebesgue integraalin käyttöönottoon ja kehittämiseen.

Yleisemmällä tasolla, (esim. differentiaali)yhtälöitä ratkaistaan tyypillisesti hakemalla approksimatiivisia ratkaisuja, ja lähes säännöllisesti funktioavaruuksilta vaaditaan täydellisyyttä, jotta approksimatiivisille ratkaisuille löydetään jokin rajafunktio.

3.1. Määritelmä. Normiavaruuden $(E, \|\cdot\|_1)$ jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_k - x_j\| < \varepsilon$$

aina kun $k \geq m_\varepsilon$ ja $j \geq m_\varepsilon$.

Huomautus. Kun tarkastellaan jonon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ määäämiä joukkoja $A_m = \{x_n : n \geq m\}$, missä $m = 1, 2, \dots$ ja huomataan näiden halkaisijoitten $\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$ avulla, että:

$$(x_n) \text{ on Cauchyn jono} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam}(A_m) = 0.$$

Seuraavat kolme lausetta kertovat Cauchy jonojen perusominaisuudet.

3.2. Lause. Normiavaruuden E suppeneva jono (x_n) on aina Cauchyn jono.

Todistus. Olkoon $\lim x_n = y$ eli $\lim \|x_n - y\| = 0$. Jos $\varepsilon > 0$, on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq m_\varepsilon.$$

Siis kun $j, k \geq m_\varepsilon$, niin $\|x_k - x_j\| \stackrel{\Delta - ey}{\leq} \|x_k - y\| + \|y - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$

Toisaalta,

3.3. Lause. Normiavaruuden E Cauchy jono (x_n) on rajoitettu.

Todistus. Olkoon $(x_n) \subset E$ Cauchy jono ja $A_m = \{x_n : n \geq m\}$. Koska (x_n) on Cauchy jono, niin on olemassa sellainen $m_0 \in \mathbb{N}$, että $\text{diam}(A_{m_0}) < 1$. Jos $y \in A_{m_0}$, niin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\|y\| \stackrel{\Delta-ey}{\leq} \|y - x_{m_0}\| + \|x_{m_0}\| < 1 + \|x_{m_0}\|.$$

Siispä täyden jonon vektoreille saamme arvion

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_{m_0-1}\|, 1 + \|x_{m_0}\|\} < \infty.$$

□

Lopuksi hyödyllinen riittävä ehto Cauchyn jonon suppenemiselle.

3.4. Lause. *Jos normiavaruuden E Cauchyn jonolla (x_n) on osajono, joka suppenee kohti vektoria $y \in E$, niin myös koko jonolle on $\lim x_n = y$.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan Cauchyn ehdosta sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_k - x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kaikilla } k, j \geq m_\varepsilon.$$

Jos (x_{n_j}) on sellainen osajono, jolle $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = y$, niin kaikilla riittävän suurilla indekseillä $j \in \mathbb{N}$ on $n_j \geq m_\varepsilon$ ja $\|x_{n_j} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x_{n_j}\| + \|x_{n_j} - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kaikilla $n \geq m_\varepsilon$. Siis $\lim x_n = y$. □

Alamme sitten tarkastelemaan täydellisiä normiavaruuksia.

3.5. Määritelmä. Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos avaruuden E jokainen Cauchyn jono (x_n) suppenee avaruudessa E (siis on olemassa sellainen $y \in E$, että $\lim x_n = y$).

Täydelliset normiavaruudet ovat funktioanalyysin keskeinen tutkimuskohde ja työkalu, joten näille on otettu käyttöön oma nimi (puolalaisen Stefan Banach'in (1892-1945) mukaan, joka merkittävällä tavalla kehitti alaa).

3.6. Määritelmä. Täydellistä normiavaruutta $(E, \|\cdot\|)$ sanotaan *Banachin avaruudeksi* (usein sanomme lyhyesti: E on Banachin avaruus).

Selvitetään seuraavaksi mitkä edellisessä luvussa löydettyistä avaruuksista ovat täydellisiä, ja erityisesti, kuinka käytännössä näytetään että annettu normiavaruus on täydellinen. Olkoon siis ensin $A \neq \emptyset$ joukko ja

$$B(A, \mathbb{K}) = B(A) := \{x : A \rightarrow \mathbb{K} : x \text{ rajoitettu kuvaus}\},$$

varustettuna normilla

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in A} |x(t)|, \quad \text{kun } x \in B(A, \mathbb{K})$$

3.7. Lause. $(B(A, \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Todistus perustuu skalaarikunnan \mathbb{K} täydellisyyteen. Nimittäin, olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$ ja $t \in A$ mielivaltainen. Koska

$$(3.8) \quad |x_k(t) - x_j(t)| \leq \|x_k - x_j\|_\infty < \varepsilon \quad \text{kaikilla } j, k \in \mathbb{N},$$

kun indeksit $k, j \geq m_\varepsilon$ ovat riittävän suuria, on skalaarijono $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono skalaarikunnassa \mathbb{K} . Tällöin on siis olemassa raja-arvo $\lim x_n(t) \in \mathbb{K}$, sillä metriset avaruudet $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ovat täydellisiä. Pitämällä $t \in A$ muuttujana saadaan raja-arvosta kuvaus $y : A \rightarrow \mathbb{K}$,

$$y(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t), \quad t \in A.$$

Lauseen väite seuraa osoittamalla seuraavat apuväitteet:

- (i) kuvaus $y \in B(A, \mathbb{K})$ eli y on rajoitettu kuvaus,
- (ii) $\|x_n - y\|_\infty \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$ eli $x_n \rightarrow y$ avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$

Tätä varten, olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, ja käytetään arviota (3.8), joka pätee *tasaisesti* jokaisella $t \in A$. Pidetään siinä $k \geq m_\varepsilon$ sekä $t \in A$ kiinteinä, ja annetaan $j \rightarrow \infty$. Silloin

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |x_k(t) - x_j(t)| = |x_k(t) - y(t)|,$$

koska yo. tarkastelee vain skalaarilukuja $x_j(t)$. Epäyhtälön (3.8) säilyminen rajalla takaa, että

$$(3.9) \quad |x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{kun } t \in A$$

ja $k \geq m_\varepsilon$. Tästä saadaan ensinnäkin että

$$|y(t)| \leq |y(t) - x_k(t)| + |x_k(t)| \leq \varepsilon + \|x_k\|_\infty \quad \text{kun } t \in A$$

eli että $y \in B(A, \mathbb{K})$. Toiseksi (3.9) pätee tasaisesti, so. samalla ε jokaisessa pisteessä $t \in A$, Saadaan siis

$$\|x_k - y\|_\infty = \sup_{t \in A} |x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{kaikilla } k \geq m_\varepsilon$$

Olemme näin näyttäneet, että $\lim x_k = y$ avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$, eli suppeneminen tapahtuu ko. avaruuden *normin* suhteen.

Ylläolevat argumentit yhdistäen nähdään että $(B(A), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. \square

3.10. Seuraus.

a) vektorivaruus \mathbb{K}^n varustettuna metriikalla

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

on Banachin avaruus.

b) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Annetaan myös esimerkki epätäydellisestä normiavaruudesta.

3.11. **Esimerkki.** $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ ei ole täydellinen normiavaruus, kun

$$\|(x_k)\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad (x_k) \in \ell^1.$$

Ratkaisu: Olkoon $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Selvästi $x^{(n)} \in \ell^1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x^{(n+p)}\|_\infty &= \left\| \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ kpl}}, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+p}, 0, 0, \dots \right\|_\infty \\ &= \sup_{n+1 \leq j \leq n+p} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \rightarrow \infty$. Siispä $(x^{(n)})$ Cauchyn jono avaruudessa $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$.

Väite epätäydellisyydestä seuraa, kun osoitetaan, että ei ole olemassa sellaista jonoa $y = (y_k) \in \ell^1$, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - y\|_\infty = 0.$$

Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että löytyisi sellainen $y = (y_k) \in \ell^1$, että $x^{(n)} \rightarrow y$ sup-normissa. Jonon $(x^{(n)})$ alkioiden k :nnet koordinaatit $x_k^{(n)}$ ovat muotoa

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

ja kaikilla indekseillä $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_k^{(n)} - y_k| \leq \|x^{(n)} - y\|_\infty \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siksi

$$y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

kun $k = 1, 2, \dots$. Toisaalta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \text{ eli } y = \left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}} \notin \ell^1,$$

mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ on epätäydellinen. \square

Huomautus. Vastaavalla tavalla osoitetaan (Tee se !) että jos $1 \leq p < q < \infty$, niin $\ell^p \subset \ell^q$ mutta $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ei ole täydellinen.

Huomautus. Polynomien muodostama normiavaruus

$$\mathcal{P} = \{ p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ polynomi} \}$$

varustettuna sup-normilla

$$\|p\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |p(t)|$$

ei ole täydellinen. Samoin, jos \mathcal{P} varustetaan luvun 2 Esimerkin 2.11 kohdassa (2) annetuilla normeilla, osoittautuu että \mathcal{P} :stä ei tule täydellistä. Epätäydellisyyden todistus on samantapainen kuin edellisessä Esimerkissä (vrt. Harjoitukset).

Seuraavan tuloksen avulla saadaan lisää esimerkkejä Banachin avaruuksista.

3.12. Lause. *Olkoon E Banachin avaruus ja $M \subset E$ suljettu aliavaruus. Tällöin M on täydellinen eli Banachin avaruus, avaruuden E indusoimassa normissa.*

Todistus. Jos $(x_n) \subset M$ on Cauchyn jono avaruudessa M , niin (x_n) on myös avaruuden E Cauchyn jono. Koska E täydellinen, niin on olemassa sellainen raja-alkio $y \in E$, että $\lim x_n = y$. Koska M on suljettu ja $x_n \in M$ kaikilla n , niin raja $y \in M$, joten M on täydellinen. \square

Edellinen tulos pätee myös käänteiseen suuntaan:

3.13. Lause. *Normiavaruuden E täydellinen aliavaruus M on suljettu avaruudessa E .*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Tällöin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, että $x_n \in M$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$ ja $\lim x_n = z$. Tällöin $(x_n)_{n=0}^\infty$ on Cauchyn jono avaruudessa E Lauseen 3.2 nojalla ja siten myös avaruudessa M , joten avaruuden M täydellisyyden nojalla $\lim x_n = y \in M$ on olemassa. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $z = y \in M$, joten siis $\overline{M} = M$ ja M on suljettu avaruudessa E . \square

3.14. Seuraus. *Olkoon M Banachin avaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on täydellinen (eli Banachin avaruus) $\Leftrightarrow M$ on suljettu.*

Todistus. Seuraa välittömästi Lauseista 3.12 ja 3.13. \square

Käytämme seuraavaksi näitä tietoja tutkimaan jatkuvien kuvausten avaruuksia.

3.15. Esimerkki. Olkoon X topologinen avaruus, ja

$$C(X) = C(X, \mathbb{K}) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ jatkuva avaruudessa } X \}.$$

Jos $f, g \in C(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin pisteittäinen summafunktiio $f + g \in C(X)$ ja $\lambda f \in C(X)$ eli $C(X)$ on vektoriavaruus. Merkitään

$$BC(X) = BC(X, \mathbb{K}) := B(X, \mathbb{K}) \cap C(X),$$

eli jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten $X \rightarrow \mathbb{K}$ avaruus. Siis $BC(X)$ on avaruuden $B(X)$ on vektorialiavaruus.

Kysymys. Onko $BC(X) \subset B(X)$ suljettu (normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen)?

Olkoon $t \in X$ kiinteä, ja

$$BC_t(X) = \{ f \in B(X) : f \text{ on jatkuva pisteessä } t \}.$$

Huomautus. (Topo I) $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ on jatkuva pisteessä $t \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen avoin ympäristö V , $t \in V \subset X$, että

$$|f(u) - f(t)| < \varepsilon \text{ kaikilla } u \in V.$$

3.16. Lemma. $BC_t(X)$ on avaruuden $B(X)$ suljettu vektorialiavaruus kaikilla $t \in X$.

Todistus. Olkoon $g \in B(X)$ sellainen funktio $X \rightarrow \mathbb{K}$, että g sisältyy avaruuden $BC_t(X)$ sulkeumaan sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $f \in BC_t(X)$, että $\|g - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä t , niin löytyy sellainen avoin ympäristö $V \subset X$, että

$$|f(t) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ kaikilla } u \in V.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} |g(t) - g(u)| &\leq \underbrace{|g(t) - f(t)|}_{\leq \|g-f\|_\infty} + |f(t) - f(u)| + \underbrace{|f(u) - g(u)|}_{\leq \|g-f\|_\infty} \\ &\leq 2 \underbrace{\|g - f\|_\infty}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

kaikilla $u \in V$. Siis g on jatkuva pisteessä t , joten $g \in BC_t(X)$ ja siis $BC_t(X)$ on suljettu. \square

3.17. Lause. $(BC(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus. Koska f on jatkuva avaruudessa X joss f on jatkuva kaikissa pisteissä $t \in X$, niin

$$BC(X) = \bigcap_{t \in X} BC_t(X),$$

missä $BC_t(X)$ on suljettu kaikilla $t \in X$ Lemman 3.16 nojalla. Siis $BC(X)$ on suljettu aliavaruus avaruudessa $B(X)$. Nyt väite seuraa Lauseista 3.7 ja 3.12. \square

3.18. Seuraus. *Jos X on kompakti topologinen avaruus, niin $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus. Erityisesti $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Käytetään Topo I:n tulosta jonka mukaan kompaktissa avaruudessa X jokainen jatkuva kuvaus $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ on rajoitettu, eli $C(X) = BC(X)$. \square

Esimerkin 2.8 kohdassa (2) esiteltiin avaruuden ℓ^∞ aliavaruudet c ja c_0 .

$$c := \{ x = (x_n)_{n=0}^\infty : x_n \in \mathbb{K}, \lim x_n \text{ on olemassa, kun } n \rightarrow \infty \},$$

$$c_0 := \{ x = (x_n)_{n=0}^\infty : x_n \in \mathbb{K}, \lim x_n = 0 \}.$$

3.19. Lause. *c ja c_0 ovat Banachin avaruuksia.*

Todistus.

1) $c_0 \subset \ell^\infty$ on suljettu vektorialiavaruus (Harjoitukset 1)

2) $c \subset \ell^\infty$ on suljettu:

Olkoon $x = (x_k) \in \ell^\infty$ sellainen jono, että $x \in \bar{c}$. Kun $\varepsilon > 0$, niin löytyy sellainen jono $y = (y_k) \in c$, että

$$\|x - y\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Koska (y_k) on suppeneva jono, niin erityisesti (y_k) on skalaarikunnan \mathbb{K} Cauchyn jono. Siis on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|y_j - y_k| < \frac{\varepsilon}{3}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned} |x_j - x_k| &\stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x_j - y_j| + |y_j - y_k| + |y_k - x_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $x = (x_k)$ on myös skalaarikunnan \mathbb{K} Cauchyn jono. Siispä (x_k) suppenee, joten $x \in c$. Siis $c = \bar{c}$ on suljettu, joten Lauseen 3.12 nojalla c on Banachin avaruus. \square

Huomautus. Olkoon $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja varustetaan se topologialla τ , jonka kantana ovat joukot

$$U = \{n\} \quad \text{ja} \quad V = \{\infty\} \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq m\}, \quad \text{missä } n, m \in \mathbb{N}.$$

Saatu avaruus $(\overline{\mathbb{N}}, \tau)$ on \mathbb{N} :n yhden pisteen kompaktifointi. Tällöin itse asiassa $c = C(\overline{\mathbb{N}})$. Siten Lause 3.19 seuraa myös Seurauksesta 3.18.

VEKTORIVARVOISISTA SARJOISTA

Olkoon E normiavaruus ja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jono avaruudessa E . Mietimme seuraavaksi vastaavan vektorisarjan $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ summautumista. Toisin sanoen, pätevätkö tutut sarjateorian perusteet myös äärettömän dimension tapauksessa?

Sarjaa merkitään tavallisesti symbolilla $\sum_k x_k$ tai $\sum x_k$. Osasummille käytetään myös tuttuja merkintöjä,

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}. \quad (s_n \in E \quad \forall n.)$$

Edelleen, alkio $x_k \in E$ on sarjan k :s *termi*.

3.20. Määritelmä. Olkoon $\sum x_k$ normiavaruuden E alkioden muodostama sarja. Mikäli osasummien jono (s_n) suppenee kohti vektoria $s \in E$, eli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s\| = 0,$$

sanotaan että sarja $\sum_k x_k$ *suppenee* ja sen *summa* on s ; merkitään tällöin

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Sanotaan, että E :n sarja $\sum_k x_k$ on *normisuppeneva* (tai *absoluuttisesti* suppe-neva), jos (\mathbb{R} -terminen) sarja $\sum_k \|x_k\|$ suppenee.

3.21. Esimerkki. Olkoon $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \dots) \in \ell^2$, kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ ℓ^2 :ssä?

Ratkaisu: Olkoon $x = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Nyt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

joten $x \in \ell^2$. Tällöin $\sum \frac{e_n}{n} = x$ ja kyseinen sarja suppenee, sillä sarjan m :s osasumma s_m on

$$s_m = \sum_{n=1}^m \frac{e_n}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, 0, 0, \dots)$$

ja siis

$$\|x - s_m\|_2 = \left\| \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{mkpl}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \dots \right\|_2 = \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \right)^{1/2} \rightarrow 0,$$

kun $m \rightarrow \infty$; kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi. Kuitenkaan sarja $\sum \frac{e_n}{n}$ ei ole normisuppeneva avaruudessa ℓ^2 , sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{e_n}{n} \right\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \|e_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \stackrel{DI}{=} \infty.$$

□

Täydellisyys ja normisuppenevien sarjojen välillä on tärkeä yhteys:

3.22. Lause. Normiavaruus E on Banachin avaruus jos ja vain jos jokainen avaruuden E normisuppeneva sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E .

Todistus.

” \Rightarrow ” Olkoon E Banachin avaruus ja $\sum_k x_k$ avaruuden E normisuppeneva sarja. Jos $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned} \|s_{n+p} - s_n\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n+p} x_j - \sum_{j=1}^n x_j \right\| = \|x_{n+1} + \dots + x_{n+p}\| \\ &\stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} \sum_{j=n+1}^{n+p} \|x_j\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|x_j\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \rightarrow \infty$. Siis (s_n) on Cauchyn jono avaruudessa E , joten se suppenee.

” \Leftarrow ” Oletetaan, että avaruuden E jokainen normisuppeneva sarja suppenee. Olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa E . Lauseen 3.4 nojalla riittää löytää suppeneva osajono (x_{n_j}) . Konstruoidaan osajono (x_{n_j}) induktiolla seuraavasti:

Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2}$$

kaikilla $p, q \geq n_0$. Oletetaan, että on jo valittu luvut $n_0 < n_1 < \dots < n_j$ ja valitaan seuraavaksi n_{j+1} . Koska jono (x_n) on Cauchyn jono, niin edelleen löytyy sellainen $n_{j+1} \in \mathbb{N}$, että $n_{j+1} > n_j$ ja

$$\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^{j+2}}$$

kaikilla $p, q \geq n_{j+1}$.

Merkitään nyt $y_0 = x_{n_0}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ kun $j = 1, 2, \dots$. Tällöin $\|y_j\| = \|x_{n_j} - x_{n_{j-1}}\| < \frac{1}{2^j}$ kaikilla $j = 1, 2, \dots$, sillä $n_j > n_{j-1}$ ja valitsemalla $p = n_j$ ja $q = n_{j-1}$ arvio seuraa.

Siispä jono (y_j) on normisuppeneva, sillä

$$\sum_j \|y_j\| < \sum_j 2^{-(j+1)} < \infty.$$

Oletuksen nojalla sarja $\sum y_j$ siis suppenee ja merkitään sarjan summaa

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j.$$

Tarkastellaan sitten sarjan $\sum y_j$ osasummia. Havaitaan, että itse asiassa

$$\sum_{j=0}^k y_j = x_{n_0} + (x_{n_1} - x_{n_0}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k}.$$

Näin ollen jonon (x_n) osajono $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $y \in E$.

Lauseen 3.4 nojalla siis myös jono (x_n) suppenee kohti pistettä y ja siis E on täydellinen.

□

Lauseen 3.22 nojalla voidaan usein osoittaa avaruuden täydellisyys: näin on esimerkiksi reaalityöjien joukon R tapauksessa. Olkoon $\sum a_k$ itseisesti suppeneva sarja R :ssä. Merkitään $b_k = |a_k| - a_k$, kun $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $0 \leq b_k \leq 2|a_k|$, joten sarja $\sum b_k$ suppenee vertailuperiaatteen nojalla. Koska $a_k = |a_k| - b_k$, suppenee sarja $\sum a_k$ myös. Siis Lause 3.22 sanoo, että \mathbb{R} on täydellinen.

Normisuppenevien sarjojen avulla myös avaruuksien ℓ^p täydellisyys saadaan ”kivuttomasti”.

3.23. Lause. *Jokainen jonoavaruus ℓ^p on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon $\sum x^{(n)}$ normisuppeneva sarja avaruudessa ℓ^p , siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p < \infty.$$

Jos vektori eli jono $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$, niin

$$|x_k^{(n)}| \leq \left(\sum_i |x_i^{(n)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x^{(n)}\|_p$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \infty, \quad \text{kullakin } k \in \mathbb{N}.$$

Siten skalaarilukujen sarja $\sum_n x_k^{(n)}$ suppenee, sillä \mathbb{K} on täydellinen. Merkitään

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^{(n)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Olemme näin löytäneet uuden lukujonon $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, ja väitämme että ko. sarja suppenee kohti vektoria y . Olkoon $\varepsilon > 0$. Normisuppenevuuden perusteella löytyy sellainen $m \in \mathbb{N}$, että

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|x^{(n)}\|_p \leq \varepsilon.$$

Olkoon $i, r, s \in \mathbb{N}$, $m \leq r < s$. Tällöin

$$\sum_{k=0}^i \left| y_k - \sum_{n=0}^r x_k^{(n)} \right|^p = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^i \left| \sum_{n=0}^s x_k^{(n)} - \sum_{n=0}^r x_k^{(n)} \right|^p \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=r+1}^s x_k^{(n)} \right|^p$$

Mutta

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{n=r+1}^s x_k^{(n)} \right|^p &= \left\| \sum_{n=r+1}^s x_k^{(n)} \right\|_p^p \leq \left(\sum_{n=r+1}^s \|x_k^{(n)}\|_p \right)^p \\ &\leq \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \|x_k^{(n)}\|_p \right)^p \leq \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Kun $s \rightarrow \infty$, niin tästä seuraa, että

$$\sum_{k=0}^i \left| y_k - \sum_{n=0}^r x_k^{(n)} \right|^p \leq \varepsilon^p$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $r \geq m$. Antamalla siis $i \rightarrow \infty$ nähdään, että

$$\|y - \sum_{n=0}^r x^{(n)}\|_p^p = \sum_{k=0}^{\infty} \left| y_k - \sum_{n=0}^r x_k^{(n)} \right|^p \leq \varepsilon^p,$$

kun $r \geq m$. Siis jono $(y_k - \sum_{n=0}^m x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, joten Lauseen 2.20 sivulla 18 nojalla

$$y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(y_k - \sum_{n=0}^m x_k^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}} + \left(\sum_{n=0}^m x_k^{(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$$

ja edelleen

$$\left\| y - \sum_{n=0}^r x^{(n)} \right\|_p \leq \varepsilon,$$

kun $r \geq m$. Näin ollen sarja $\sum x^{(n)}$ suppenee ja Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla ℓ^p on Banachin avaruus. \square

L^p -AVARUUDET

Haluamme seuraavaksi määritellä jonoavaruuden ℓ^p vastineet jatkuvassa tapauksessa, eli avaruudet joiden normit saadaan suureista

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p}$$

Päädymme näin L^p -avaruuksien käsitteeseen. Tämän tarkempi/syvällisempi teoria kuuluu kursseihin Mitta- ja integraali sekä Reaalianalyysi. L^p -avaruudet ovat kuitenkin keskeisiä esimerkkejä Funktionaalianalyysissä ja sen sovelluksissa; lisäksi Hilbert-avaruuksien (todellisesta) käytöstä ei saa kunnan kuvaa ilman L^2 -avaruuksia. Käymme siksi alla L^p -avaruuksien perusideat lyhyesti läpi, niitä lukijoita silmällä pitäen, jotka eivät ole vielä suorittaneet yo. kursseja. Keskitymme nimenomaan ideoitten esittelyyn ja sivuutamme useiden väitteiden todistukset, jotka jäävät Mittateorian kursseilla käsiteltäviksi.

Tämän kurssin tarpeisiin riittää tarkastella (Lebesgue-)mitallisia osajoukkoja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mutta mitä alla kerrotaan pätee myös yleisissä mitta-avaruuksissa (Ω, μ) . Muotoa

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$$

olevia funktioita kutsutaan yksinkertaisiksi funktioiksi; tässä $a_k \in \mathbb{K}$, $E_k \subset \Omega$ on mitallinen joukko sekä karakteristinen funktio $\chi_E(x) = 1$ jos $x \in E$ ja $\chi_E(x) = 0$ kun $x \notin E$. Yksinkertaisen funktion integraali määritellään yksinkertaisesti

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k)$$

[Muista myös: m.k. \equiv melkein kaikkialla, so. nollamittaisen joukon ulkopuolella.]

Jos $0 \leq f$ on mitallinen funktio, löytyy jono yksinkertaisia funktioita f_n niin että $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq f$ ja $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ melkein kaikkialla. Itse asiassa funktio on mitallinen jos ja vain jos se on yksinkertaisten funktioiden pisteittäinen raja m.k. $x \in \Omega$. Asetetaan

$$(3.24) \quad \int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu,$$

missä f_n :nien integraalit muodostavat kasvavan lukujonon, ja siten yo. raja-arvo on olemassa.

Mittateoriassa näytetään että (3.24):n raja-arvo on approksimoivan jonon $\{f_n\}$ valinnasta riippumaton. Mutta voi hyvin olla että (3.24):n raja-arvo ja siis f :n integraali on ∞ ! Tämän pulman välttämiseksi, yleiselle mitalliselle funktiolle f sanotaan että se on *integroituva*, mikäli $\int_{\Omega} |f| d\mu < \infty$.

Jos nyt $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on integroitava, funktion positiivinen osa $f_+ = \max\{f(x), 0\}$ ja negatiivinen osa $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ovat integroituvia, ja voimme asettaa

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f_+ d\mu - \int_{\Omega} f_- d\mu$$

Kompleksiarvoiselle funktiolle $f = u + iv$ asetetaan $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} u d\mu + i \int_{\Omega} v d\mu$.

Mittateoriassa osoitetaan, että jos f on Riemann integroitava (erityisesti, jos f on jatkuva!), silloin nyt määritelty integraali on täsmälleen sama kuin tuttu Riemann integraali !!

Olkoon sitten $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $\mu(\Omega) > 0$, missä μ on Lebesguen mitta avaruudessa \mathbb{R}^n . Määrittelemme aluksi joukon $L^{(p)}(\Omega) = L^{(p)}$ niiden mitallisten funktioiden $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ joukkona, joille

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p} < \infty.$$

Jotta $L^{(p)}$ olisi vektoriavaruus, on näytettävä, että $\|\cdot\|_p$ on seminormi avaruudessa $L^{(p)}$. Tähän tarvitaan (kuten ℓ^p -avaruuksien tapauksessa) Hölderin epäyhtälöä.

3.25. Lemma (Hölderin epäyhtälö). *Jos $f \in L^{(p)}$ ja $g \in L^{(q)}$, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, niin tällöin tulo $fg \in L^{(1)}$ ja $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ eli*

$$\int_{\Omega} |(fg)(x)| d\mu(x) \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

Todistus. Jos $\|f\|_p = 0$, niin $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$, jolloin myös tulo $(fg)(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$ ja siis $\int |fg| d\mu = 0$. Samoin pätee, jos $\|g\|_q = 0$. Näissä tapauksissa väite on ilmeinen.

Voidaan siis olettaa, että $\|f\|_p \|g\|_q > 0$. Sovelletaan Lemmaa 2.14 sivulla 14 muuttujat asettamalla

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \text{ ja } b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

mistä seuraa epäyhtälö

$$\frac{|(fg)(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integroimalla tämä puolittain muuttujan x suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \|f\|_p^{-1} \|g\|_q^{-1} \int_{\Omega} |fg| d\mu &\leq \frac{1}{p} \|f\|_p^{-p} \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q} \|g\|_q^{-q} \int_{\Omega} |g(x)|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

□

3.26. Seuraus (Minkowskin epäyhtälö). *Jos $f, g \in L^p$ ja $p \geq 1$, niin*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Todistus. HT. □

Koska selvästi $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, niin $L^{(p)}$ on tämän ja Minkowskin epäyhtälön nojalla \mathbb{K} -kertoiminen vektoriavaruus. Mutta avaruudessa $L^{(p)}$ on se pulma, että $\|\cdot\|_p$ *ei ole* normi:

$$f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega \Leftrightarrow \|f\|_p = 0!$$

($\|f\|_p$ on vain seminormi). Pulmasta selvitäksemme, samaistamme kaikki ne funktiot, jotka ovat samoja m.k. x .

Seuraava esimerkki antaa mielikuvan mitä tämä samaistaminen käytännössä merkitsee. Integroidaan vaikkapa seuraava funktio välillä $[0, 1]$,

$$f(x) = x, \text{ kun } 0 \leq x < 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 \leq x \leq 1$$

Voisimme myös asettaa (Piirrä funktioiden kuvaajat !)

$$f(x) = 1, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 < x \leq 1$$

koska ei ole mitään luonnollista tapaa valita f :n arvoa epäjatkuvuuspisteessä $x = 1/2$; selvästi molemmat valinnat ovat yhtä hyviä, ja integroinnin kannalta molemmat valinnat tuottavat saman tuloksen. Onkin siksi järkevää samaistaa nämä funktiot !

Yleisemmin, annetulla funktiolla voi olla paljon enemmän epäjatkuvuus- (tai ”epämääräisyys”)pisteitä, joten saman filosofian mukaan on järkevää samaistaa funktiot f ja g , jos $f(x) = g(x)$ nollamittaista x :ien joukkoa lukuunottamatta.

Täsmällistä määrittelyä varten sanotaan että funktiot $f, g \in L^{(p)}$ ovat ekvivalentit, merk. $f \sim g$, jos $f = g$ m.k. x . Asetetaan myös

$$[f] = \{g \in L^{(p)} : g \sim f\}$$

Huomataan, että jos $f \sim g$ ja $F \sim G$ niin $(f + F) \sim (g + G)$, eli ekvivalenssiluokat muodostavat vektoriavaruuden, $[af + bg] = a[f] + b[g]$ (Selvitä itsellesi tämän yksityiskohdat !). Määritellään nyt

$$(3.27) \quad L^p(\Omega) = \{[f] : f \in L^{(p)}(\Omega)\}$$

Huomataan että $\|f\|_p = \|g\|_p$ aina kun $f \sim g$, ja $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ on siten hyvin määritelty. Edelleen, $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$, eli avaruudessa $L^p(\Omega)$ suure $\|\cdot\|_p$ on normi.

Käytännössä, pidämme (so. kohtelemme) $L^p(\Omega)$:n elementtejä funktioina. Myös, siisteissä tapauksissa, esimerkiksi jos luokassa $[f]$ on jatkuva funktio, valitsemme sen luokan edustajaksi, eikä tulkinta $f \in L^p(\Omega)$ tuota pulmia.

Kuitenkin, yleisessä tapauksessa L^p -funktion arvo ei pisteittäin hyvin määritelly. Jos tarvitsemme tiettyä arvoa $f(x)$, joudumme valitsemaan luokasta $[f]$ yhden edustajan; jos haluamme näin saada tietoa koko luokasta $[f]$, meidän on tällöin huolehdittava siitä, että päättelyjen lopputulos (!) ei riipu edustajan f valinnasta.

Toinen tapa määritellä $L^p(\Omega)$ on tulkita yo. konstruktio enemmän lineaarialgebrallisin keinoin, käyttäen vektoriavaruuden tekijäavaruuksia. Tarkemmin, olkoon X vektoriavaruus ja M sen aliavaruus. Koska X on yhteenlaskun suhteen Abelin ryhmä ja M sen aliryhmä, voimme muodostaa tekijäryhmän X/M , jonka alkioina ovat jäännösluokat modulo M ,

$$x + M, \quad x \in X.$$

(Tässä $x + M$ määritelly joukkona, kuten Luvussa 2) Asetetaan yhteenlasku ja skalaarilla kertominen luonnollisilla kaavoilla

$$(3.28) \quad (x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

$$(3.29) \quad \lambda(x + M) = \lambda x + M$$

ja näin saadaan tekijäryhmästä X/M vektorialiavaruus.³

Olkoon nyt M avaruuden $L^{(p)}$ vektorialiavaruus, joka koostuu niistä funktioista f , joille pätee $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$.

3.30. Määritelmä. Avaruus $L^p = L^p(\Omega)$ on tekijäavaruus $L^{(p)}/M$.

Jos $f \in L^{(p)}$ on yleensä tapana merkitä funktion f määräämää tekijäavaruuden L^p alkioita eli luokkaa $f + M$ myös symbolilla f ! Tässä on siis vain pidettävä mielessä, että jos kaksi avaruuteen $L^{(p)}$ kuuluvaa funktiota poikkeaa toisistaan enintään 0-mittaisessa joukossa, ne ovat avaruuden L^p alkioina samoja.

Kuten edellä todettiin, $\|f\|_p$ on sama kaikille funktioille $f \in L^{(p)}$, jotka poikkeavat toisistaan enintään 0-mittaisessa joukossa, joten lauseke $\|f\|_p$ on hyvin määritelly myös kaikille $f \in L^p$.

Seuraava tulos on keskeinen Funktionaalianalyttisiä sovelluksia silmälläpitäen.

3.31. Lause. $\|\cdot\|_p$ on normi avaruudessa L^p . Tällä normilla varustettuna L^p on Banachin avaruus.

³Tarkemmin tätä ideaa selvitetään kurssilla Lineaarialgebra II.

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa yo. keskustelusta (Huomaa, että Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt pätevät myös avaruudessa L^p ; Miksi?).

L^p -avaruuksien täydellisyys kuuluu oikeastaan Reaalianalyysin kurssin materiaaliin, sillä päättely tarvitsee muutaman perustuloksen Lebesgue-integroinnista. Siksi ne lukijat, jotka eivät ole vielä Reaalianalyysiä suorittaneet, voivat ottaa tuloksen annettuna; todistuksen argumentteja ei tarvita muualla tässä kurssissa.

Luonnostelemme alla kuitenkin täydellisyystodistuksen pääpiirteet, jotta Mitat teoriaan perehtymätönkin lukija saa mielikuvan miten mitallisten funktioiden kanssa operoidaan. Täydellisyysargumentti on itse asiassa analoginen ℓ^p -avaruuksien tapauksen kanssa.

L^p -avaruuksien täydellisyttä varten tarvitaan seuraava Mitta ja integraalin tulos:

3.32. Lemma (Fatoun Lemma). *Jos $f_n: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ on mitallinen kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \, d\mu.$$

Todistus. Olkoon $g_k(x) = \inf_{n \geq k} f_n(x)$. Silloin g_k on mitallinen, $g_k \leq f_k$, $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ sekä

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Koska $\{g_k\}$ on kasvava funktiojono, Monotonisen suppenemisen lauseen mukaan $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k \, d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \, d\mu$. Erityisesti,

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k(x) \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) \, d\mu.$$

□

Lauseen 3.31 todistus jatkuu. Olkoon $\sum f_n$ normisuppeneva sarja avaruudessa L^p ja $\sum \|f_n\|_p \leq M < \infty$. Lauseen 3.22 sivulla 33 nojalla riittää osoittaa, että $\sum f_n$ suppenee. Voimme valita edustajan $f_n \in L^{(p)}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja riittää siis löytää sellainen $f \in L^{(p)}$, jolle

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=1}^k f_n - f \right\|_p = 0.$$

Jos merkitään

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|, \quad x \in \Omega,$$

niin

$$\|g_k\|_p = \left\| \sum_{n=1}^k |f_n| \right\|_p \leq \sum_{n=1}^k \|f_n\|_p \leq M.$$

Monotonisen suppenemisen lauseen nojalla

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right)^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^k |f_n| \right)^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \leq M^p < \infty.$$

Siis $g := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \in L^p$ ja edelleen tästä seuraa, että $g(x) < \infty$ m.k. x ja näillä x

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee avaruudessa \mathbb{K} . Asetetaan $f(x) = 0$, jos $g(x) = \infty$, jolloin $|f(x)| \leq g(x)$ ja $f \in L^p$. Lisäksi Fatoun lemmän nojalla

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu &= \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^j f_n - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \sum_{n=1}^j f_n - \sum_{n=1}^k f_n \right|^p d\mu \end{aligned}$$

Otetaan nyt p :nnet juuret puolittain saadusta epäyhtälöstä, jolloin päädytään

$$\left\| f - \sum_{n=1}^k f_n \right\|_p = \liminf_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=k+1}^j f_n \right\|_p \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=k+1}^j \|f_n\|_p = \sum_{n=k+1}^{\infty} \|f_n\|_p \rightarrow 0,$$

kun $k \rightarrow \infty$. Siispä jokainen avaruuden L^p normisuppeneva sarja suppenee, joten L^p on täydellinen eli L^p on Banachin avaruus. \square

Yllä oletettiin, että $1 \leq p < \infty$. Tapaus $p = \infty$ on itse asiassa helpompi. Koska tapauksissa $1 \leq p < \infty$ samaistimme funktiot, jotka poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa, haetaan nyt tälle vastine kun $p = \infty$. Päädymme seuraavaan käsitteeseen:

3.33. Määritelmä. Mitallinen funktio $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ on *oleellisesti rajoitettu*, jos on olemassa $0 \leq M < \infty$, jolle $|f(x)| \leq M$ kaikilla x jonkin 0-mittaisen joukon ulkopuolella. *Oleellinen supremum* eli

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

on infimum kaikista edellä mainituista luvuista M , siis

$$\|f\|_{\infty} := \inf \{ M : \text{joukon } \{ x \in \Omega : |f(x)| > M \} \text{ mitta} = 0 \}.$$

Kuten tapauksessa $1 \leq p < \infty$ samaistamme taas $f \sim g$, jos $f(x)$ ja $g(x)$ poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa. Merkitään avaruudella L^{∞} joukkoa, jonka muodostavat kaikki oleellisesti rajoitettujen funktioiden ekvivalenssiluokat $[f]$.

Kuten edellä, tulemme säännöllisesti käyttämään merkintää $f \in L^{\infty}$, kun tarkkaan ottaen tarkoitetaan, että f :n määräämä luokka $[f] \in L^{\infty}$.

3.34. Lause. $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Todistus.

Taas tarvitaan hieman Mittateorian tietoja, ja siksi ne lukijat jotka eivät ole Reaalianalyysia suorittaneet, voivat ottaa tuloksen annettuna. Selvyyden vuoksi annamme kuitenkin tässä todistuksen yksityiskohdat.

1) $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, sillä

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty + 1/n\}) = 0$$

2) L^∞ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_\infty$ on normi: Koska $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ ja $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, saadaan

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ m.k. } x \in \Omega \Rightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

(Selvitä itsellesi miksi $\|af\|_\infty = |a|\|f\|_\infty$ kaikilla $f \in L^\infty$!)

3) L^∞ on täydellinen:

Olkoon (f_n) Cauchyn jono avaruudessa L^∞ . Lauseen 3.3 sivulla 25 nojalla jono on rajoitettu eli $\|f_n\|_\infty \leq M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon A_k ja $B_{n,m}$ ne joukon Ω osajoukot, joissa $|f_k(x)| < \|f_k\|_\infty$ ja $|f_n(x) - f_m(x)| < \|f_n - f_m\|_\infty$. Oleellisen supremumin määritelmän nojalla joukot A_k ja $B_{n,m}$ ovat 0-mittaisia. Asetetaan

$$E = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cup \left(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{n,m} \right)$$

Tällöin

$$\mu(E) \leq \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jono (f_n) on Cauchyn jono, löytyy sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

kunhan $n, m \geq n_\varepsilon$. Kun $x \in \Omega \setminus E$, niin

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

kunhan $n, m \geq n_\varepsilon$, joten $(f_n(x))$ on Cauchyn jono avaruudessa \mathbb{K} . Siispä on olemassa raja-arvo $f(x) := \lim f_n(x)$ jokaisella $x \in \Omega \setminus E$. Asetetaan $f(x) = 0$, kun $x \in E$. Koska

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M$$

kaikilla $x \in \Omega \setminus E$, niin $f \in L^\infty$. Samoin on voimassa

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

kun $n \geq n_\varepsilon$. Koska $\mu(E) = 0$, niin tästä seuraa, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

□

Huomautus. Yleisimmin määritellään (vastaavalla tavalla kuin L^∞ -avaruus) Banachin avaruus $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ kun (Ω, Σ, μ) on (täydellinen) mitta-avaruus ja $1 \leq p \leq \infty$ (vrt. Reaalianalyysi I, 1.4-1.6)

Ylimääräinen huomautus: Avaruuden L^∞ täydellisyys voidaan todistaa myös käyttäen edellä kuvattua tekijäavaruuden struktuuria. Nimittäin, jos M on avaruuden X vektorialiavaruus niin yhtälöiden (3.28) avulla määriteltiin uusi vektoriavaruus X/M . Jos nyt X on normiavaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus, saadaan X/M :stä normiavaruus asettamalla

$$\|x + M\|_{X/M} = \inf\{\|x + m\| : m \in M\} = \inf\{\|x - m\| : m \in M\} = \text{dist}(x, M)$$

Helposti nähdään että $\|x + M\|_{X/M}$ on normi: Jokaisella $m_1, m_2 \in M$

$$\|x + y + M\|_{X/M} \leq \|x + y + m_1 + m_2\| \leq \|x + m_1\| + \|y + m_2\|$$

ja ottamalla inf yli vektoreiden m_1, m_2 , saadaan

$$\|x + y + M\|_{X/M} \leq \|x + M\|_{X/M} + \|y + M\|_{X/M}$$

Samalla tavalla nähdään, että $\|ax + M\|_{X/M} = |a| \|x + M\|_{X/M}$. Lisäksi, ylläolevasta seuraa, että $\|x + M\|_{X/M} = 0 \Leftrightarrow \text{dist}(x, M) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{M} = M$, eli $x + M = 0 + M$, avaruuden X/M nolla-alkio.

Lisäksi, harjoituksissa näytetään, että jos X on Banach avaruus ja $M \subset X$ on suljettu v.a.a, niin silloin X/M on Banach avaruus.

Valitsemalla nyt $X = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \text{ rajoitettu ja mitallinen}\} \subset B(\Omega, \mathbb{K})$ havaitaan mittateorian avulla, että X on suljettu $B(\Omega, \mathbb{K})$:ssa, ja siis Banach avaruus. Jos $M = \{f \in X : f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega\}$, niin silloin voidaan samais-
taa

$$L^\infty = X/M$$

(Väitteen yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi harjoitustehtäväksi)

Harjoitus 4/Tehtävä 5 kertoo nyt että L^∞ on Banach avaruus.

BANACHIN KIINTOPISTELAUSE (EPÄLINEAARINEN FA)

Seuraava täydellisyyden aspekti on osoittautunut hyödylliseksi ja monipuoliseksi työkaluksi monissa eri funktionaalianalyysin sovelluksissa.

3.35. Määritelmä. Olkoon E Banach-avaruus ja $D \subset E$ osajoukko ($D \neq \emptyset$). Kuvaus $T : D \rightarrow E$ on *kontraktio* D :ssä, jos

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \text{ kaikilla } x, y \in D$$

Kuvaus $T : D \rightarrow E$ on *aito kontraktio* jos on olemassa sellainen vakio $0 \leq k < 1$, että

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| \text{ kaikilla } x, y \in D$$

Jokainen kontraktio $T : D \rightarrow E$ on tasaisesti jatkuva D :ssä. Piste $x \in D$ on kuvauksen $T : D \rightarrow E$ *kiintopiste*, jos $T(x) = x$. Huomaa, että kontraktion ei tarvitse olla lineaarinen kuvaus.

Huomautus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $D \subset X$ osajoukko. Vastaavalla tavalla määritellään (aito) kontraktio $T : D \rightarrow X$ ja sen kiintopiste.

3.36. Lause (Banachin kiintopistelause, 1922). *Olkoon E Banachin avaruus ja $D \subset E$ suljettu osajoukko ja $T : D \rightarrow D$ aito kontraktio. Tällöin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$ (eli $T(x) = x$).*

Todistus. Jos $x_0 \in D$ on mielivaltainen, asetetaan rekursiivisesti

$$\begin{cases} x_1 = T(x_0), \\ x_{n+1} = T(x_n), \quad \text{kun } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Merkitään $\alpha_n = \|x_{n+1} - x_n\|$ ($n \in \mathbb{N}$). Tällöin

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \|x_{n+1} - x_n\| = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \\ (3.37) \quad &= k\|T(x_{n-1}) - T(x_{n-2})\| \leq k^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\ &\leq \dots \leq k^n\|x_1 - x_0\| = k^n\alpha_0, \end{aligned}$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Kolmioepäyhtälöä, arviota (3.37) ja geometrisen sarjan summa-kaavaa käyttämällä saadaan kaikilla $p = 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$ arvio

$$\begin{aligned} (3.38) \quad \|x_{n+p} - x_n\| &\leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \|x_{j+1} - x_j\| = \sum_{j=n}^{n+p-1} \alpha_j \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} k^j \alpha_0 \\ &= \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{p-1} k^j \leq \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{\alpha_0 k^n}{1-k} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siis $(x_n) \subset E$ on Cauchyn jono. Koska E Banachin avaruus, niin $\lim x_n = x \in E$. Koska $x_n = T(x_{n-1}) \in D$ kaikilla $n = 1, 2, \dots$, niin

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \overline{D} = D,$$

koska D on suljettu. Koska edelleen oletettiin, että T jatkuva, niin

$$T(x) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

eli x on kiintopiste. Osoitetaan vielä, että x on yksikäsitteinen. Olkoon $y \in D$ toinen kiintopiste kuvaukselle T eli $T(y) = y$. Tällöin

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$$

jollakin $0 \leq k < 1$, sillä T on aito kontraktio. Siispä ainoa mahdollisuus on, että $\|x - y\| = 0$ eli $x = y$. □

Huomautus. Yllä olevassa todistuksessa kiintopiste x löytyi iteroimalla:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n), \text{ missä } x_n = T(x_{n-1}) = \dots = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ kpl}}(x_0),$$

missä $x_0 \in D$ oli jopa mielivaltainen. Lisäksi epäyhtälöstä (3.38) saadaan virhearvio (antamalla $p \rightarrow \infty$):

$$(3.39) \quad \|x - T^n(x_0)\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|T(x_0) - x_0\|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi tarkastellaan parilla esimerkillä kuinka Banachin kiintopistelauseita voidaan soveltaa. Sovelluskohteita on itse asiassa lukematon määrä, aina yhden muuttujan numeriiikasta esim. fraktaaligeometriaan asti. Sovelluksissa on tietysti löydettävä kuhunkin ongelmaan sopiva Banachin avaruus ja vastaava kontraktiokuvaus.

3.40. Esimerkki. Johdantoluvussa [vrt. (0.1)] lupasimme ratkaista integraalilyhtälön

$$(3.41) \quad f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s)ds = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

ainakin kun parametri λ on pieni. Nyt meillä on koossa tässä tapauksessa tarvittavat ratkaisun elementit:

Annetuista funktioista $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ oletettiin että ne ovat jatkuvia. Siksi on luontevaa valita alla olevaksi Banach avaruudeksi $C(0, 1)$. Sopiva kontraktiokuvaus voidaan muodostaa monellakin tavalla; niistä helpoin ja luonnollisin ehkä

$$(3.42) \quad T : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1), \quad (Tf)(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x, s)f(s)ds$$

sillä heti nähdään, että f on T :n kiintopiste, $T(f) = f$, jos ja vain jos f ratkaisee yhtälön (3.41).

Esimerkin 2.27 tuloksista seuraa, että $T : C(0,1) \rightarrow C(0,1)$ on jatkuva kuvaus. Saman Esimerkin menetelmällä voimme myös selvittää milloin T on aito kontraktio. Nimittäin

$$\begin{aligned} \|Tf - Th\|_\infty &= \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 \lambda K(x,s) (f(s) - h(s)) ds \right| \\ &\leq |\lambda| \|K\|_\infty \|f - h\|_\infty \end{aligned}$$

missä $\|K\|_\infty = \sup\{|K(x,s)| : x, s \in [0,1]\}$. Havaitaan siis että T on aito kontraktio jos λ on niin pieni, että $|\lambda| < 1/\|K\|_\infty$.

Banachin kiintopistelauseesta seuraa nyt että mikäli $|\lambda| < 1/\|K\|_\infty$, on kuvauksella T kiintopiste ja siten yhtälöllä (3.41) ratkaisu $f \in C(0,1)$; lisäksi f on yksikäsitteinen.

Banachin kiintopistelause on varsin vahva, sillä se antaa myös nopean algoritmin integraaliyhtälön ratkaisun f konstruoimiseksi (esim. numeerisesti): Lauseen jälkeisen huomautuksen mukaan $f = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ missä

$$g_0(x) = g(x), \quad g_1(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x,s)g(s)ds,$$

$$g_2(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 K(x,s)g(s)ds + \lambda^2 \int_0^1 K(x,t) \int_0^1 K(t,s)g(s)ds dt,$$

ja niin edelleen. Lisäksi, arvion (3.39) mukaan jonon g_n suppeneminen on eksponentiaalista.

Ainoa pulma Banachin lauseessa on että se toimii vain (aidoille) kontraktioille. Erityisesti, herää kysymys: miten yhtälöt (3.41) käyttäytyvät yleisillä parametreilla λ ? !

Seuraava esimerkki näyttää, että yllä λ :n pienuus oli olennaista; yleisten parametrien tapaus on siis monimutkaisempi.

3.43. Esimerkki. Valitaan integraaliyhtälön (3.41) ytimeksi $K(x,s) = xs$, $0 \leq x, s \leq 1$, sekä olkoon annettu funktio $g(x) \equiv 1$. Silloin yhtälö (3.41) saa muodon

$$(3.44) \quad f(x) - \lambda x \int_0^1 sf(s)ds = 1, \quad x \in [0,1]$$

Koska $\|K\|_\infty = \sup_{x,s \in [0,1]} |K(x,s)| = 1$, yhtälöllä on ratkaisu ainakin kun $|\lambda| < 1$. Lisäksi kuten yllä, ratkaisun voi löytää iteroimalla operaattoria $Th = 1 + \lambda \int_0^1 xsh(s)ds$; iteroinnissa huomataan että ratkaisun voi kehittää potenssisarjana λ :n suhteen. Valitussa erikoistapauksessamme potenssisarjan

voi jopa esittää suljetussa muodossa (Ylimääräinen HT: Määrää ko. sarja ja sen summa).

Toisaalta, tapauksessa $K(x, s) = x s$ yhtälön voi myös ratkaista suoraan: Havaitaan nimittäin, että jokainen (3.44):n ratkaisu on muotoa $f(x) = 1 + Cx$ jollakin vakiolla C (Miksi?). Sijoittamalla nähdään että (3.44):n kanssa on yhtäpitävää

$$(3.45) \quad 1 + Cx - \lambda x \int_0^1 s(1 + Cs) ds = 1$$

Integroinnin jälkeen (Tee se !) tämä identiteetti saa muodon $C - \lambda(1/2 + C/3) = 0$. Siten

$$C = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{3 - \lambda} \quad \text{ja} \quad f(x) = 1 + \frac{3\lambda x}{6 - 2\lambda}$$

Integraaliyhtälö siis ratkeaa aina kun $\lambda \neq 3$. Kun $\lambda = 3$ ratkaisua ei ole millään vakiolla C .

Ylläolevassa löysimme tasan yhden poikkeusarvon λ . Esimerkkiä muokkaamalla voit helposti löytää ytimiä, joilla on 2, 3 tai useampia poikkeusarvoja.

Kun seuraavassa luvussa olemme rakentaneet Hilbertavaruuksien perusteorian, tulemme osoittamaan vielä enemmän:

3.46. Esimerkki. Olkoon

$$(3.47) \quad K(x, s) = \frac{1}{3 - e^{2\pi i(x-s)}}, \quad x, s \in [0, 1]$$

[Huom: Eulerin identiteettiä $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ käyttäen yo. ytimen voi kirjoittaa myös trigonometristen funktioiden avulla.]

Tällöin: Jos $\lambda \neq 3^n$, $n = 1, 2, \dots$, yhtälö (3.41) ratkeaa kaikilla $g \in C(0, 1)$. Toisaalta, jos $\lambda = 3^n$ jollakin n , ei ratkaisua kaikilla funktioilla g löydy !

Väitteen todistus seuraa nopeasti Fourier-sarjojen ominaisuuksista, ja jätämme sen siksi lukuun 4.

Huomaa, että tässäkin esimerkissä poikkeusarvojen joukko jää diskreetiksi.

Katsotaan lopuksi vielä yksi (hyvin!) erilainen esimerkki Banachin kiintopistelauseen soveltamisesta; tämä esimerkin luonne on yleissivistävä, eikä kuulu varsinaiseen kurssisisältöön; sivuutamme siksi osan todistuksista.

Muistetaan että Banachin kiintopistelause on yleispätevä periaate, jota voidaan käyttää myös täydellisissä metrisissä avaruuksissa. Konstruoidaan nyt sen avulla Kochin lumihutalekäyrä !

3.48. Esimerkki. Olkoon $\mathcal{X} = \{ A \subset \mathbb{R}^2 : A \text{ on } \textit{kompakti}^4 \text{ osajoukko} \}$. Jos $A, B \in \mathcal{X}$, asetamme

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} \text{dist}(x, B), \sup_{y \in B} \text{dist}(y, A)\right\},$$

missä etäisyys $\text{dist}(x, B)$ pisteestä x joukkoon A määritellään

$$\text{dist}(x, B) = \inf\{ \|x - b\| : b \in B \}$$

kun normina $\|\cdot\|$ on euklidinen normi tasossa \mathbb{R}^2 . Tällöin d_H on *metriikka* joukkoperheessä \mathcal{X} ja tätä metriikkaa sanotaan *Hausdorffin metriikaksi*.

Lisäksi (\mathcal{X}, d_H) on *täydellinen* (perustuu kompaktisuuteen, sivuutetaan yksityiskohdat; HT). Olkoot $f_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $1 \leq j \leq n$, aitoja kontraktioita ja $k_j < 1$ vastaavat kontraktiovakiot. Tällöin

$$(*) \quad k = \max_{j=1, \dots, n} k_j < 1,$$

jolloin siis $\|f_j(x) - f_j(y)\| \leq k\|x - y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja $j = 1, 2, \dots, n$. Asetetaan

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A),$$

kun $A \in \mathcal{X}$ eli kun $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti osajoukko. Koska kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti (Topologia I) on

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A)$$

kompakti kaikilla $A \in \mathcal{X}$. Siis $\Phi(A)$ on kuvaus $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$.

Väite. Φ on aito kontraktio $(\mathcal{X}, d_H) \rightarrow (\mathcal{X}, d_H)$

Todistus. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakteja. Jos

$$z \in \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A),$$

⁴Heine-Borel: $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakti $\Leftrightarrow A$ suljettu ja rajoitettu

niin $z = f_l(x)$ joillakin $x \in A$ ja $l \in \{1, \dots, n\}$. Olkoon $y \in B$ m.v. Tällöin $f_l(y) \in f_l(B) \subset \Phi(B)$, joten

$$\text{dist}(z, \Phi(B)) \leq \|f_l(x) - f_l(y)\| \leq k \|x - y\|$$

missä $k < 1$ ehdon (*) nojalla. Siis ottamalla infimum muuttujan $y \in B$ suhteen saadaan, että

$$\text{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \text{dist}(x, B).$$

Koska $z \in \Phi(A)$ mielivaltainen, on

$$\sup_{z \in \Phi(A)} \text{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \sup_{x \in A} \text{dist}(x, B)$$

Symmetrian perusteella pätee:

$$\sup_{z \in \Phi(B)} \text{dist}(z, \Phi(A)) \leq k \sup_{y \in B} \text{dist}(y, A)$$

Siispä

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) \leq k d_H(A, B)$$

kun $A, B \in \mathcal{X}$, joten Φ on aito kontraktio. □

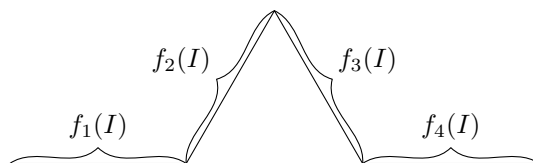
Nyt Banachin kiintopistelauseen metrisen version nojalla kuvauksella Φ on yksikäsitteinen kiintopiste $A \in \mathcal{X}$ eli on olemassa kompakti osajoukko $A \subset \mathbb{R}^2$, jolle

$$A = \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^n f_j(A).$$

Valitaan esimerkiksi kontraktiot f_j *similariteeteiksi* eli

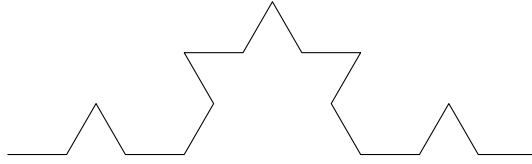
$$f_j(x) = r_j O_j(x) + b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

missä $0 < r_j < 1$, $b_j \in \mathbb{R}^2$ ja $O_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jokin tason kierto origon ympäri. Tällöin saadaan kauniita esimerkkejä ”fraktaaleista” joukoista. Valitaan vaikkapa similaariteetit $f_1, \dots, f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ siten, että ne kuvaavat yksikköjanan $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ kuten seuraavassa kuvassa.

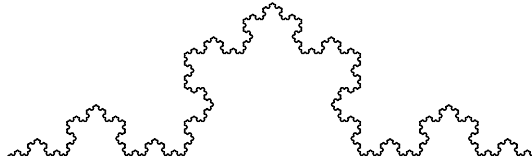


Nämä similaariteetit määräävät kuvauksen Φ kuten yllä. Mikä on tällöin vastaava invariantti joukko A , jolle $\Phi(A) = A$?!

Banachin kiintopistelauseen todistuksesta tiedämme, että kiintopiste A saadaan iteroimalla kuvausta Φ (esim. lähtien joukosta $I \in \mathcal{X}$). Nyt $\Phi^2(I) = \Phi(\Phi(I))$ näyttää tältä:



Rajalla $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(I)$ saa seuraavan muodon (Kochin lumihiutalekäyrä):



Edellä oleva Banachin kiintopistelauseen sovellus on peräisin J. E. Hutchinsonilta vuodelta 1981.