2. Normi ja normiavaruus

Olkoon E vektoriavaruus (eli lineaariavaruus) skalaarikuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Kurssilla Lineaarialgebra I määriteltiin vain $\mathbb{R}$-kertoimiset vektoriavaruudet, mutta kompleksikertoimiset avaruudet määritellään täysin analogisesti: Avaruudessa E on yhteenlaskun $x + y$ lisäksi annettu skalaarillla kertominen $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, kuvaus $\mathbb{C} \times E \to E$, joka toteuttaa ehdot

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \text{ja} \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

kaikilla vektoreilla $x, y \in E$ ja skalaareilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Useimmiten kurssin tulokset ja käsitteet toimivat täysin samoin molemmille skalaarikunnan valinnalle, $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, ja käytämme silloin skalaarikunnalle merkintää $\mathbb{K}$. Jos skalaarikunta pitää spesifioida, siitä huomautetaan erikseen.

Esimerkkejä. $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{C}\}$ on $\mathbb{C}$-kertoiminen vektoriavaruus. Sellainen on myös kompleksisten polynomien avaruus

$$\mathcal{P} \;=\; \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : \; a_k \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{N}\}$$

Dimensio: Kerrataan ensin lineaarialgebran käsitteitä. Jos $A \subset E$, sen virittämä E:n vektorialiavaruus on

$$\operatorname{span}(A) = \{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k : \; x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}\} \tag{2.1}$$

Lineaarialgebrasta muistetaan myös että vektorijono $x_1, \dots, x_n \in E$ on lineaarisesti riippumaton eli vapaa, jos

$$\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Honkasalon monisteen Lineaarialgebra I sivulla 50 on todistettu seuraava tulos, jonka oletamme tunnetuksi:

Vektoriavaruus E on äärellisulotteinen (so. äärellisen vektorijoukon virittämä) jos ja vain jos E:n vapaiden jonojen *pituudet* ovat ylhäältä rajoitetut, so. on luku $M < \infty$ niin että jokaisessa E:n vapaassa joukossa on korkeintaan M vektoria.

Muistetaan vielä, että äärellisulotteisen avaruuden E dimensio $\dim(E)$ on E:n kannan (so. vapaan virittäjäjoukon) lukumäärä; tämä lukumäärä on kannasta riippumaton luku.

Tämä kaikki toimii myös kun kerroinkuntana on $\mathbb{C}$. Esimerkiksi yllä $\mathbb{C}^n$ on äärellisulotteinen (tarkemmin, n-ulotteinen), kun taas $\mathcal{P}$ on ääretönulotteinen: Vektorit z^n, $n \in \mathbb{N}$, muodostavat vapaan joukon (Miksi ?) ja koska tuo joukko on ääretön, yo. tuloksen nojalla $\dim(\mathcal{P}) = \infty$.

Keskeinen idea Funktionaalianalyysissä on tuoda hyödyllisiä struktuureja funktioiden muodostamiin vektoriavaruuksiin erilaisten normien avulla.

2.2. **Määritelmä.** Kuvaus $p : E \to \mathbb{R}_+$ on *normi* E:ssä , jos

(N1) $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ kaikilla $x, y \in E$ (*"kolmioepäyhtälö"*)

(N2) $p(ax) = |a|p(x)$ kaikilla $x \in E, a \in \mathbb{K}$ (*"homogeenisuus"*)

(N3) $p(x) = 0 \iff x = \bar{0}$ (nolla-alkio E:ssä)

Tavallisesti merkitään $p(x) = \| x \|$. Paria $(E, \| \cdot \|)$ eli vektoriavaruutta E varustettuna normilla $\| \cdot \|$ sanotaan *normiavaruudeksi*.

Huomautus.

(1) normi $\| \cdot \|$ edellyttää , että määrittelyjoukko E on lineaariavaruus:

$$x + y \in E \text{ kun } x, y \in E \text{ ja } ax \in E \text{ kun } x \in E, a \in \mathbb{K}.$$

(2) Kuvaus $p : E \to \mathbb{R}_+$ on *seminormi* E:ssä, jos p toteuttaa ehdot (N1) ja (N2).[1] Tällöin

$$p(\bar{0}) = p(0 \cdot \bar{0}) = |0|p(\bar{0}) = 0,$$

ja $\{ x \in E : p(x) = 0 \}$ on avaruuden E vektorialiavaruus ehtojen (N1) ja (N2) nojalla.

2.3. **Esimerkkejä.**

(1) $$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

on avaruuden $\mathbb{R}^n$ *euklidinen* normi, kun $n = 1, 2, \ldots$. Ehdot (N1)-(N3) toteutuvat; katso Topo I. Hieman myöhemmin tämä todistetaan myös erikoistapauksena yleisemmän avaruuden ℓ^p yhteydessä.

(2) Kun A on (m.v.) joukko, asetetaan

$$B(A, \mathbb{K}) := \{ f \colon A \to K : \| f \|_\infty := \sup_{t \in A} |f(t)| < \infty \}.$$

Tämä on rajoitettujen kuvausten $A \to \mathbb{K}$ avaruus. Helposti nähdään, että $\| f \|_\infty$ on normi:

[1] tämä yleisempi käsite on joskus tarpeen; tällä kurssilla suhteellisen harvoin

Perustelu. Olkoon $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $t \in A$. Tällöin

$$|(f+g)(t)| = |f(t)+g(t)| \overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} |f(t)| + |g(t)| \overset{\text{määr.}}{\leq} \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

$$\underset{t\in A}{\overset{\text{sup yli}}{\Longrightarrow}} \| f+g \|_\infty = \sup_{t\in A} |(f+g)(t)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

eli ehto (N1) on voimassa. Olkoon $a \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin

$$|(af)(t)| = |af(t)| = |a||f(t)| \underset{\text{t:n}}{\overset{\text{sup yli}}{\Rightarrow}} \| af \|_\infty = |a| \| f \|_\infty$$

eli myös ehto (N2) on voimassa. Koska

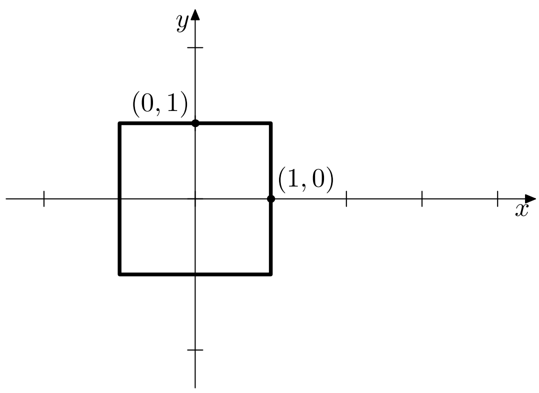
$$\| f \|_\infty = \sup_{t\in A} |f(t)| = 0 \iff f(t) = 0 \quad \forall t \in A$$
$$\iff f \text{ on } \bar{0}\text{-funktio}$$

niin myös (N3) toteutuu. □

(3) Myös $\mathbb{R}^n$:ssä tai $\mathbb{C}^n$:ssä voidaan määritellä normi edellisen kohdan erikoistapauksena: tällöin $A = \{1, \ldots, n\}$, jolloin saadaan normi

$$\| x \|_\infty := \sup(|x_1|, \ldots, |x_n|),$$

missä $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Vaikka tämä normi antaa entisen topologian, sup-normin "geometria" on hieman erilainen. Esimerkiksi dimensiossa $n = 2$ avaruuden $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ yksikköpallo $B_E = \{x : \| x \|_\infty \leq 1\}$ näyttää seuraavalta:



KUVA 3. Pallo B_E avaruudessa $E = (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$

(4) Toinen erikoistapaus (2)-kohdasta saadaan, kun $A = \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$\ell^\infty := B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{ \, (x_n)_{n=0}^\infty : \; x_n \in \mathbb{K}, \| x \|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \, \}.$$

Koska vektorit $e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \ldots) \in \ell^\infty$ ovat lineaarisesti riippumattomia (Miksi ?), on $\dim(\ell^\infty) = \infty$.

Seuraavaksi osoitetaan pari normin perusominaisuutta, joista seuraavan lauseen (2)-kohta liittää normiavaruudet metrisiin.

2.4. **Lause.** *Olkoon* $(E, \|\cdot\|)$ *normiavaruus. Tällöin*

(1) kaikilla $x, y \in E$ *on voimassa*

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \le \|x - y\|$$

eli ns. $\triangle -$ *ey"alaspäin". Erityisesti, kuvauksena normi* $x \mapsto \|x\|$ *on* tasaisesti *jatkuva* E*:ssa*

(2) kuvaus $d\colon E \times E \to \mathbb{R}_+$, $d(x,y) := \|x - y\|$ *on metriikka avaruudessa* E*. Erityisesti* $\|x\| = d(x, 0)$, $x \in E$.

Todistus.

(1) (vrt. Topo I, D II) Olkoon $x, y \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|x\| = \|x - y + y\| &\overset{\triangle-\text{ey}}{\le} \|x - y\| + \|y\| \\ &\Longrightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x - y\| \\ &\overset{\text{symm}}{\Longrightarrow} \|y\| - \|x\| \le \|y - x\| \overset{\text{(N2)}}{=} \|x - y\| \\ &\Longrightarrow \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \le \|x - y\| \end{aligned}$$

(2) (vrt. Topo I) kaikilla $x, y, z \in E$ on voimassa

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \overset{\text{(N1)}}{\le} \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x,y) + d(y,z), \end{aligned}$$

joten (M1) toteutuu. Ehto (M2) seuraa välittömästi ehdosta (N2). Edelleen

$$d(x,y) = \|x - y\| = 0 \overset{\text{(N2)}}{\Longleftrightarrow} x - y = \bar{0} \Longleftrightarrow x = y,$$

joten myös (M3) on voimassa.

□

Metrisinä avaruuksina funktioavaruudet voivat olla melko "suuria", esimerkkinä olkoon vaikkapa ℓ^∞, joka ei ole edes separoituva (vrt. Harjoitukset) . Useille käytännössä eteen tuleville funktioavaruuksille separoituvuus toisaalta pätee; myöhemmin osoitamme tämän esimerkiksi $C(0,1)$:lle.

Normiavaruuden luonnolliset rakenteet ovat yhteensopivat, toisin sanoen:

2.5. **Lause.** *Normiavaruudessa* $(E, \|\cdot\|)$ *ovat kuvaukset*

$$\psi_1 \colon E \times E \to E, \psi_1(a,b) := a + b$$

ja

$$\psi_2 \colon \mathbb{K} \times E \to E, \psi_2(\lambda, a) := \lambda a$$

jatkuvia.

Todistus. Harjoitukset 1. □

Huomautus. Normiavaruuden E metriikka on *siirto-* eli *translaatioinvariantti*: on siis voimassa, että

$$d(x+a, y+a) = d(x,y) \quad \text{kaikilla} \;\; x, y, a \in E$$

Tästä sekä ominaisuudesta (N2) seuraa, että $A \subset E$ on avoin (vast. suljettu, kompakti) *joss* $x_0 + A$ ja λA ovat avoimia (vast. suljettuja, kompakteja), missä $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ja $x_0 \in E$ ovat mielivaltaisia. Samoin joukko $U \subset E$, joka sisältää pisteen x_0 on pisteen x_0 ympäristö joss $U - x_0$ on nolla-alkion $\bar{0}$ ympäristö. Pistejono $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset E$ suppenee alkioon $y \in E$ joss $x_n - y \to 0$ kun $n \to \infty$ avaruudessa E.

Edellä käytimme merkintöjä

$$x_0 + A = \{ \, x_0 + y : \; y \in A \, \} \subset E,$$
$$\lambda A = \{ \, \lambda x : \; x \in A \, \}$$

Samoin määritellään, kun $A \subset E$, $B \subset E$ ja $\Lambda \subset \mathbb{K}$,

$$A + B = \{ \, x + y : \; x \in A, y \in B \, \},$$
$$\Lambda A = \{ \, \lambda x : \; \lambda \in \Lambda, x \in A \, \}$$

Huomautus. Monet funktioavaruuksien konvergenssikäsitteistä voidaan kuvata normin avulla (ja kääntäen, normi antaa konvergenssikäsitteen):

2.6. **Esimerkkejä.**

(1) Kun avaruus $C(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} \;\; \text{jatkuva} \}$ varustetaan tavallisella normillaan $\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$, pätee

$$\| f_n - f \|_\infty \to 0 \;\; \text{kun} \; n \to \infty \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \quad \text{tasaisesti joukossa} \; [0,1]$$

(2) Toisaalta $C(0,1)$:ssä voidaan määritellä myös normi $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. (Selvitä itsellesi miksi $\|\cdot\|_1$ on normi $C(0,1)$:ssä !). Nyt pätee

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0 \Leftrightarrow f_n(x) \to f(x) \text{ 'keskimäärin'}$$

Esimerkiksi, jos $f_n(x) = x^n$, niin $f_n \to 0$ 'keskimäärin' eli normin $\|\cdot\|_1$ mielessä, sillä $\| f_n \|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$. Toisaalta jono ei konvergoi sup-normin mielessä nollaan, sillä $\| f_n \|_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Annetuista normiavaruuksista saadaan muodostettua uusia avaruuksia monella eri tavalla. Tulemme jatkossa näkemään tästä useitakin esimerkkejä. Aloitamme seuraavalla yksinkertaisella periaatteella.

2.7. **Lause.** *Jokainen normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ vektorialiavaruus F on normiavaruus (E:n indusoimalla normilla varustettuna).*

2.8. **Esimerkkejä.**

(1) Voimme esimerkiksi valita $E = B([0,1], \mathbb{K})$, jolla on aliavaruutena jatkuvien funktioiden avaruus $F = C(0,1)$.

(2) Olkoon sitten $E = \ell^\infty$; seuraavat jonoavaruudet ovat sen vektorialiavaruuksia.

$$c := \{ \, x = (x_n)_{n=0}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \lim x_n \text{ on olemassa, kun } n \to \infty \, \},$$

$$c_0 := \{ \, x = (x_n)_{n=0}^\infty : \ x_n \in \mathbb{K}, \lim x_n = 0 \, \}.$$

Molemmissa normina toimii siis $\| x \|_\infty = \sup_n |x_n|$.

Joskus voi olla hyödyllistä muuttaa normia, ilman että sen määräämä topologia tai konvergenssi muuttuu. Tämä idea johtaa seuraavaan käsitteeseeen.

2.9. **Määritelmä.** Vektoriavaruuden E normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa vakiot $C_1, C_2 > 0$, joille

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \| x\|_1 \quad \forall x \in E$$

2.10. **Lause.** *Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ekvivalentteja normeja avaruudessa E. Tällöin ne määrittelevät avaruudessa E samat avoimet ja suljetut joukot (eli ne määrittävät saman topologian).*

Todistus. Harjoitukset 1 □

2.11. **Esimerkki.**

(1) Helposti nähdään, että $\mathbb{C}^n$:n normit

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j|, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

ovat ekvivalentit; jätämme lukijan tarkastettavaksi arviot $\| x \|_\infty \le \| x \|_2 \le \sqrt{n} \| x \|_\infty$, jotka pätevät jokaisella $x \in \mathbb{C}^n$. Itse asiassa, tulemme myöhemmin näkemään, että *äärellisulotteisen* vektoriavaruuden kaikki normit ovat ekvivalentit.

(2) Olkoon $\mathcal{P} = \{p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : a_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}$ polynomien muodostama vektoriavaruus. Tällöin esimerkiksi

$$\|p\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{ja} \quad \|p\|_2 = \max_k |a_k|$$

ovat hyvin määriteltyjä (Miksi?) normeja (Miksi?) avaruudessa $\mathcal{P}$. Normit eivät ole kuitenkaan ekvivalentteja: jos $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$, niin jokaisella n, $\|p_n\|_2 = 1$ mutta $\|p_n\|_1 = n$. Koska tässä n voidaan valita mielivaltaisen suureksi, normit ovat epäekvivalentit.

2.12. **Esimerkki.** Merkitään

$$C^k(0,1) = \{ f \colon [0,1] \to \mathbb{K} : \ f, f', \ldots, f^{(k)} \text{ ovat jatkuvia välillä } [0,1] \},$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Normit

$$\| f \| = \sup_{0 \le j \le k} \sup_{0 \le t \le 1} |f^{(j)}(t)|$$

ja

$$\| f \| = \sum_{j=0}^{k} \sup_{0 \le t \le 1} |f^{(j)}(t)|$$

ovat ekvivalentteja avaruudessa $C^k(0,1)$, minkä todistus jää harjoitustehtäväksi.

ℓ^p-AVARUUDET

Normiavaruudet ℓ^∞, c ja c_0 ovat esimerkkejä klassisista Banachin avaruuksista. Mainitsemme vielä esimerkkinä avaruuden

$$\ell^1 = \{ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : \ \| x \|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \},$$

joka on *itseisesti* tai *absoluuttisesti suppenevien lukujonojen* avaruus. Myös tässä $\| \cdot \|_1$ on helppo todistaa normiksi. Vaikeammin käsiteltäviä esimerkkejä ovat muut ns. ℓ^p-avaruudet, joita nyt ryhdymme määrittelemään.

2.13. **Määritelmä.** Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin

$$\ell^p := \{ \ x = (x_n)_{n=0}^{\infty} : \ \| \, x \, \|_p := \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \}.$$

Seuraavassa p ja q ovat reaalilukuja, jotka täyttävät ehdot:

$$p > 1, \quad q > 1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sanomme lukuja p ja q toistensa *duaalieksponenteiksi.* Esimerkiksi $p = q = 2$ tai $p = 7$, $q = \frac{7}{6}$ ovat duaalieksponenttipareja. Edelleen on voimassa, että $q = \frac{p}{p-1}$ ja $p + q = pq$.

2.14. **Lemma.** *Jos $a \geq 0$, $b \geq 0$ ja p ja q ovat duaalieksponentteja, niin*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.15}$$

Todistus. Jos $a = 0$ tai $b = 0$, niin (2.15) on voimassa. Voimme olettaa: $a, b > 0$. Merkitään

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q},$$

kun $t > 0$. Tällöin $\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1}$, joten $\varphi'(t) < 0$, kun $0 < t < 1$ ja $\varphi'(t) > 0$, kun $t > 1$. Siispä φ saa pienimmän arvonsa, kun $t = 1$, eli kaikilla $t > 0$

$$1 = \varphi(1) \leq \varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

Sijoitetaan $t = a^{1/q} b^{-1/p}$, jolloin saadaan

$$1 \leq \frac{a^{p/q}}{pb} + \frac{b^{q/p}}{qa},$$

$$\Longleftrightarrow \ ab \leq \frac{a^{p/q+1}}{p} + \frac{b^{q/p+1}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

sillä $\frac{p}{q} + 1 = p$ ja $\frac{q}{p} + 1 = q$.

□

2.17. **Lause** (Hölderin epäyhtälö jonoille)**.** *Olkoot $1 < p, q < \infty$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{H}$$

kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q$ *(tässä* $x_k, y_k \in \mathbb{K}$ *kaikilla* k *ja* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *tai* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*). Siis*

$$\| (x_k y_k) \|_1 \leq \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q,$$

ja erityisesti $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q \Longrightarrow$ *tulojono* $(x_k y_k) \in \ell^1$*.*

Huomautus. Kun epäyhtälöön (H) sijoitetaan luvut, jotka toteuttaa lisäehdot $0 = x_k = y_k$ kaikilla $k > n$, saadaan erikoistapauksena äärellinen versio Hölderin epäyhtälöstä:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$$

kun $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $n = 1, 2, 3, \ldots$

Todistus. (Epäyhtälölle (H)):
Merkitään

$$A = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \| (x_k) \|_p, \quad B = (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q)^{\frac{1}{q}} = \| (y_k) \|_q,$$

jolloin $A \geq 0, B \geq 0$. Jos $A = 0$ tai $B = 0$, niin $x_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ tai $y_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin (H) on ilmeinen, sillä vasen puoli $= 0$. Voidaan siis olettaa: $A > 0$, $B > 0$. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$ ja sovelletaan Lemmaa 2.14, kun $a = \frac{|x_k|}{A}$ ja $b = \frac{|y_k|}{B}$. Saadaan

$$\frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{B^q},$$

mikä on voimassa kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Summataan edelliset muuttujan k suhteen, jolloin

$$\frac{1}{AB} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|^q}{B^q}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^p} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}_{=A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{B^q} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q}_{=B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

joten kertomalla AB:llä puolittain, saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq AB = \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q.$$

□

Hölderin erikoistapauksella $p = q = 2$ on oma nimitys ja merkitys (vrt. Hilbertin avaruudet, luku 4).

2.18. **Seuraus** (Schwarzin epäyhtälö). *Jos* $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$, *niin*

$$\text{(S)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \| x \|_2 \| y \|_2$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. *Lisäksi äärellisten jonojen erikoistapauksessa saadaan*

$$\text{(S')} \qquad \sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \le (\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ *ja kaikilla* $n \in \mathbb{N}$.

Erityisesti, Schwarzin epäyhtälö takaa että avaruudessa ℓ^2 bilineaarimuoto

$$< x, y > = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \,, \qquad x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$$

on hyvin määritelty. Tämä antaa ℓ^2:een sisätulon struktuurin; tulemme näkemään Hilbertin avaruuksia koskevassa osaluvussa, että sisätuloavaruuksilla on monia "poikkeuksellisen hyviä" ominaisuuksia.

Hölderin epäyhtälön avulla voimme osoittaa, että ℓ^p-normit toteuttavat kolmioepäyhtälön; saatua arviota sanotaan (usein) *Minkowskin epäyhtälöksi.*

2.19. **Lause** (Minkowskin epäyhtälö). *Olkoon* $1 < p < \infty$. *Tällöin*

$$\text{(M)} \qquad (\sum_{k=1}^{\infty}|x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^{\infty}, (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$.

Erityisesti: Kun $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^p$, niin summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$, joten ℓ^p on siis vektoriavaruus. Valitsemalla $x_k = 0, y_k = 0$ kun $k \ge n + 1$ saadaan äärellinen versio:

$$\text{(M')} \qquad (\sum_{k=1}^{n}|x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$.

Todistus. Olkoon $1 < q < \infty$ sellainen, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (eli siis $q = \frac{p}{p-1}$). Hölderin epäyhtälön (H) ja $\mathbb{K}$:n kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{p-1} \underbrace{|x_k + y_k|}_{\leq |x_k| + |y_k|} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \\
&\overset{\text{(H)}}{\leq} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&+ \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Koska $q(p-1) = p$, niin edellinen epäyhtälö. voidaan kirjoittaa muodossa

$$\| (x_k + y_k) \|_p^p \leq \big(\| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p \big) \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Jakamalla saatu epäyhtälö puolittain termillä $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{q}} = \| (x_k + y_k) \|_p^{p/q}$ ja käyttämällä identiteettiä $p - p/q = 1$, saadaan

$$\| (x_k + y_k) \|_p = \| (x_k + y_k) \|_p^{p-p/q} \leq \| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p,$$

joka on tarkalleen etsitty Minkowskin epäyhtälö (M).

Lisäys yllä olevaan todistukseen: Edellisessä todistuksessa on pieni ongelma; viimeisessä vaiheessa tehty jakaminen on mahdollista vain, jos

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p < \infty.$$

Pulman korjaamiseksi huomataan: Jos $\sum |x_k + y_k|^p = 0$, niin väite (M) on triviaali. Voidaan siis olettaa $\sum |x_k + y_k|^p > 0$. Epäyhtälöä $\sum |x_k + y_k|^p < \infty$ varten käytetään arviota

$$(*) \qquad |a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p),$$

mikä on voimassa kaikilla $a, b \in \mathbb{K}$. Kun sijoitetaan $a = x_k$, $b = y_k$ epäyhtälöön $(*)$ ja summataan yli muuttujan k saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq 2^p \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\Big) < \infty,$$

koska $(x_k), (y_k) \in \ell^p$. Näin Lause 2.19 on saatu täydellisesti todistetuksi. $\square$

Huomautus. Erikoistapauksessa $p = 2$ äärellisiä jonoja koskeva epäyhtälö (M') on itse asiassa tuttu kolmioepäyhtälö kotiavaruuden $\mathbb{K}^n$ euklidiselle normille (DII, Topo I), sillä $\| x \|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, kun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Kootaan yhteen edelliset tulokset (tapaukset $p = 1$ tai ∞ käsiteltiin aikaisemmin) seuraavaksi tärkeäksi lauseeksi ℓ^p-avaruuksista.

2.20. **Lause.** *$(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ on normiavaruus kun $1 < p < \infty$.*

Todistus. Jos $x = (x_k) \in \ell^p, y = (y_k) \in \ell^p$ niin $x + y = (x_k + y_k)$ ja Minkowskin epäyhtälön 2.19 mukaan

$$\| x + y \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \| x \|_p + \| y \|_p$$

(ja erityisesti $x + y \in \ell^p$). Siis (N1) pätee. Koska

$$\| ax \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |ax_k|^p)^{\frac{1}{p}} = |a| (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} = |a| \| x \|_p,$$

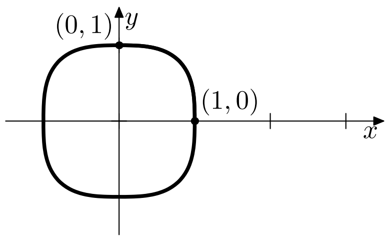
kun $x = (x_k) \in \ell^p, a \in \mathbb{K}$, niin myös homogeenisuusehto (N2) on voimassa. Edelleen

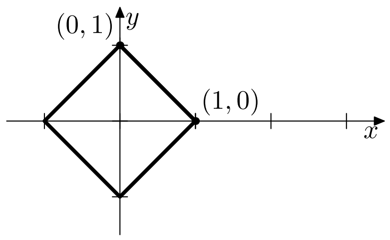
$$0 = \| (x_k) \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}) \Longrightarrow x_k = 0 \; \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow (x_k) = (0, 0, \ldots) = \bar{0},$$

joten myös (N3) toteutuu. $\square$

Huomautus. ℓ^p-avaruuksien välillä pätevät seuraavat sisältyvyydet (joukkoina): $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty$ kun $1 < p < q < \infty$. Lisäksi $\| x \|_\infty \leq \| x \|_q \leq \| x \|_p \leq \| x \|_1$ kaikille jonoille $x = (x_k)$ (Harjoitukset 2).

Edellä olemme piirtäneet yksikköpallot normien $\| \cdot \|_2$ ja $\| \cdot \|_\infty$ suhteen. Entä yksikköpallo yleisten ℓ^p-normien suhteen ? Alla kuva tapauksesta $p = 3$ ja $p = 1$; mieti millainen on yksikköpallo yleisellä p !





Huomautus (Lisätietoja). On olemassa luontevia vektoriavaruuksia E, joissa on luonnollinen siirtoinvariantti topologia τ, joka kuitenkaan ei ole minkään E:n *normin* indusoima (ts. ei ole olemassa sellaista normia $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$, että $\tau = \tau_{\|\cdot\|}$). Sellaisten avaruuksien teoriaa ei käsitellä kurssin aikana; esimerkkeinä mainitaan kuitenkin

(1) Varustetaan avaruus $C(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ jatkuva }\}$ topologialla τ, jossa jono $f_n \to f$, jos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Topologia τ saadaan kasvavasta *seminormiperheestä* $(\|\cdot\|_m)$, kun

$$\| f \|_m = \sup_{x\in K_m} |f(x)|,$$

$f \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $K_m = [-m, m]^n \subset \mathbb{R}^n$, sekä $m \in \mathbb{N}$. Konvergenssia ei kuitenkaan voi kuvata vain yhden normin $\|\cdot\|$ avulla. Topologinen vektoriavaruus $(C(\mathbb{R}^n), \tau)$ on ns. *nukleaarinen Frechet'n* avaruus.

Vastaava koskee myös äärettömästi derivoituvien funktioiden avaruutta $C^\infty(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbb{K},\ \ f^{(j)} \text{ jatkuva jokaisella } j \in \mathbb{N}\}$.

(2) Olkoon $0 < p < 1$. Määritellään: jono $x = (x_k) \in \ell^p$, jos

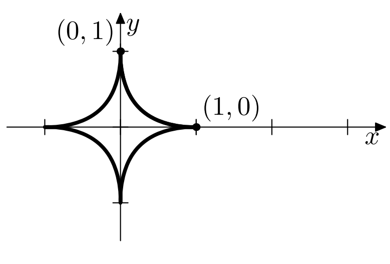
$$\| x \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Tällöin $x \mapsto \| x \|_p$ toteuttaa normin ehdot (N2) ja (N3) sekä kolmioepäyhtälön muodossa

$$\| x + y \|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}-1}(\| x \|_p + \| y \|_p)$$

kaikilla $x = (x_k)$, $y = (y_k) \in \ell^p$. Tässä $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$, kun $0 < p < 1$, eli $\|\cdot\|_p$ on ns. *kvasinormi* ℓ^p:ssä.

Alla kuva "yksikköpallosta" $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p \le 1\}$, kun $p = 1/2$.



Huomautus. Jokaisessa normiavaruudessa yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \| x \| \le 1\}$ on konveksi, so. jos $x, y \in B_E$, niin $tx + (1-t)y \in B_E$

kaikilla $0 < t < 1$; nimittäin $\| tx + (1-t)y \| \leq t\| x \| + (1-t)\| y \| \leq 1$. Siispä myöskään yo. kuvan mukaan $\| \cdot \|_p$ ei voi olla normi: vastaava yksikköpallo ei ole konveksi.

(3) Kaikkien jonojen avaruus

$$s = \{ \ (x_n) : \ x_k \in \mathbb{K} \text{ jokaisella } k \in \mathbb{N} \ \}.$$

Avaruudessa s on summa ja skalaarilla kertominen määritelty kuten ℓ^p:ssä, ja metriikka

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

kun $x = (x_k), y = (y_k) \in s$. Voidaan osoittaa, että d on siirtovariantti metriikka (HT). Avaruus s on myös nukleaarinen Frechet'n avaruus.

Lineaariset operaattorit

Olkoon E ja F vektoriavaruuksia. Kuvaus $T : E \to F$ on *lineaarinen* jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Sanomme usein että T on *lineaarinen operaattori*. Usein myös merkitsemme lyhyesti Tx, merkinnän $T(x)$ sijaan.

Äärellisulotteisessa normiavaruudessa kaikki lineaariset kuvaukset ovat jatkuvia, mutta äärettömän monen dimension avulla jatkuvuus on helppo rikkoa (annamme esimerkin hieman myöhemmin). Jos E, F ovat normiavaruuksia, on siis luonnollista kysyä:

Koska lineaarinen kuvaus $T : E \to F$ on jatkuva ??

Vastausta varten tarvitsemme uuden käsitteen, rajoitetut operaattorit.

2.21. **Määritelmä.** Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T : E \to F$ lineaarinen. Sanomme, että T on *rajoitettu*, jos on vakio $C < \infty$ jolle

$$\|Tx\|_F \leq C \, \|x\|_E \qquad \text{kaikilla } x \in E.$$

Yleisesti sanotaan että normiavaruuden osajoukko $A \subset E$ on rajoitettu, jos $\sup\{\|x\| : x \in A\} \leq M < \infty$; yhtäpitävästi (Miksi?), A:n halkaisija on äärellinen. Kuten Harjoituksissa 2 nähdään, lineaarinen kuvaus T on rajoitettu jos ja vain jos se kuvaa E:n rajoitetut joukot F:n rajoitetuiksi joukoiksi.

2.22. **Esimerkki.** Olkoon $E = F = \ell^2$ ja $T : E \to F$ kuvaus $T : (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (3x_{k+1})_{k=1}^{\infty}$ kun $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. Tällöin T on lineaarinen (Miksi?) ja rajoitettu:

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |3x_{k+1}|^2\right)^{1/2} = 3\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^2\right)^{1/2} \le 3\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = 3\|x\|_2$$

Huomaamme, että vaadituksi vakioksi voidaan ottaa $C = 3$.

Operaattorin rajoittuneisuus voidaan myös testata seuraavan suureen avulla; nimittäin (Harjoitukset) T on rajoitettu jos ja vain jos

$$\|T\| := \sup\{\, \|Tx\| : x \in E,\ \|x\| \le 1\} < \infty \tag{2.23}$$

Niinkuin merkintä jo vihjaa, saatua suuretta kutsutaan lineaarisen kuvauksen T *normiksi.* Se mittaa kuinka suureksi joukoksi T kuvaa yksikköpallon $B_E = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$.

Siis operaattori T on rajoitettu jos ja vain jos normi $\|T\| < \infty$. Jos tarve vaatii, merkitsemme avaruudet E ja F näkyviin, so. $\|T\|_{E\to F}$.

Huomautus. Koska $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ jokaisella vektorilla $x \in E$, nähdään että

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \|T\| \quad \text{kaikilla } x \in E$$

Siis saamme

$$\|Tx\| \le \|T\|\|x\| \tag{2.24}$$

jokaisella vektorilla $x \in E$ ja lineaarikuvauksella $T : E \to F$.
[vrt. myös Harjoitukset 2, tehtävä 3 c)].

2.25. **Esimerkkejä.** a) Olkoon $E = \ell^2$ ja $F = \ell^1$ sekä

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^{\infty} := \left(\frac{1}{k}x_k\right)_{k=1}^{\infty}$$

Onko T rajoitettu (operaattorina $T : \ell^2 \to \ell^1$) ? Heti havaitaan että

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|$$

mutta helppo arvio $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$ ei ole yleisesti totta. Voimme kuitenkin käyttää Hölderin epäyhtälöä kun $p = q = 2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = C\|x\|_2$$

missä $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2} < \infty$. (Itse asiassa, $C = \sqrt{\pi^2/6}$). Näin ollen $T : \ell^2 \to \ell^1$ on rajoitettu ja saamme normille arvion $\| T \| \leq \sqrt{\pi^2/6}$.

b) Rakennetaan sitten lineaarinen operaattori, joka *ei* ole rajoitettu. Voimme vaikkapa tarkastella avaruutta $\mathcal{P} = \{ p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k : \ a_k \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N} \}$, joka muodostuu kaikista polynomeista; varustetaan se normilla $\|p\| = \max\{|a_k|\}$. Tällöin, esimerkiksi, (derivaatta)kuvaus T: $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} k\, a_k\, z^k$ on lineaarinen (Miksi?), mutta ei rajoitettu: Jos $p_n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, silloin

$$\| p_n \| = 1, \quad \| Tp_n \| = n \quad \Rightarrow \quad \sup\{\| Tp \| : \| p \| = 1, p \in \mathcal{P} \} \ = \ \infty.$$

Palataan sitten alkuperäiseen kysymykseemme, milloin lineaarinen kuvaus on jatkuva ? Käy ilmi, että lineaarinen operaattori on jatkuva täsmälleen silloin kun se on rajoitettu !

2.26. **Lause.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T : E \to F$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(i) *T on rajoitettu operaattori*
(ii) *T on jatkuva (koko E:ssä)*
(iii) *T on jatkuva* yhdessä *pisteessä $x_0 \in E$.*

Todistus. (i) $\Rightarrow$ (ii): jos $x, y \in E$ ja $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\| Tx - Ty \| \overset{\text{T lin.}}{=} \| T(x - y) \| \leq \| T \| \cdot \| x - y \| < \varepsilon \quad \text{kun} \quad \| x - y \| \leq \frac{\varepsilon}{\| T \|}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): ilmeinen
(iii) $\Rightarrow$ (i): Olkoon T jatkuva x_0:ssa. Jos $\varepsilon > 0$ annettu, voimme valita sellaisen luvun $\delta > 0$ että aina

$$\| x - x_0 \| \leq \delta \Rightarrow \| Tx - Tx_0 \| < \varepsilon$$

Jos nyt $x \in E$ ja $\| x \| < \delta$, saadaan

$$\| Tx \| \underset{\text{T lin.}}{=} \| T(x + x_0) - Tx_0 \| < \varepsilon.$$

Toisaalta, jos $x \in B_E$, on $\| \delta x \| = \delta \| x \| \leq \delta$ ja siis

$$\delta \| Tx \| = \| T(\delta x) \| < \varepsilon, \quad \text{eli} \quad \| Tx \| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall x \in B_E$$

Olemme näin näyttäneet: T on rajoitettu. □

Erityisesti, näemme, että Esimerkki 2.25 b) antaa lineaarisen operaattorin, joka ei ole jatkuva.

Näillä tiedoin voimme myös aloittaa johdannossa esitetyn integraalioperaattorin tarkemman tarkastelun. Tulemme palaamaan teemaan useasti myöhemminkin.

2.27. **Esimerkki.** Olkoon $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ jatkuva. Kun $f \in C(0,1)$, muunnamme sen uudeksi funktioksi Tf, missä

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s) f(s) ds, \qquad x \in [0,1]$$

Väite: näin saadaan jatkuva lineaarinen operaattori $T : C(0,1) \to C(0,1)$. Meidän siis on osoitettava kolme asiaa,

1. $f \mapsto Tf$ on lineaarinen,
2. Tf on jatkuva funktio aina kun f on jatkuva välillä $[0,1]$, ja
3. operaattorina T on rajoitettu $C(0,1) \to C(0,1)$.

Jätetään 1. väite lukijan tehtäväksi. Väite 2. kertoo että todellakin $T\big(C(0,1)\big) \subset C(0,1)$. Sitä varten arvioidaan

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &= \Big| \int_0^1 K(x,s) f(s) ds - \int_0^1 K(y,s) f(s) ds \Big| \\ &\leq \int_0^1 \big| K(x,s) - K(y,s) \big| \, |f(s)| ds \end{aligned}$$

Funktion Tf:n jatkuvuus siis palautuu K:n ominaisuuksiin. Heti kuitenkin huomataan, että pelkkä pisteittäinen K:n jatkuvuus ei riitä, vaan arvio pitää tehdä tasaisesti s:n suhteen. Tarvitsemme siis hieman tietoja Topologian kurssilta: Oletamme tunnetuksi, että kompaktissa joukossa määritelty jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva[2] .

Sovellamme tätä ytimeen $K(x,s)$. Koska $[0,1] \times [0,1]$ on kompakti, jokaisella $\varepsilon > 0$ löydämme δ:n niin että jos $|x-y| < \delta$ eli $|(x,s) - (y,s)| < \delta$, silloin

$$|K(x,s) - K(y,s)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } s \in [0,1] \tag{2.28}$$

Erityisesti, vaaditun δ:n suuruus ei riippunut pisteestä s. Saamme siksi

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \varepsilon \int_0^1 |f(s)| ds \leq \varepsilon \| f \|_\infty, \quad \text{kun } |x-y| < \delta \tag{2.29}$$

Koska ε oli mielivaltainen, olemme osoittaneet Tf:n jatkuvuuden (väite 2).

Myös väite 3. käyttää topologista tulosta: Koska K on jatkuva kompaktissa joukossa $[0,1] \times [0,1]$, se saa siinä suurimman arvonsa, ja erityisesti K on rajoitettu. Siis eräällä vakiolla $M < \infty$,

$$|K(x,s)| \leq M < \infty \quad \text{kaikilla } x,s \in [0,1]$$

[2]Funktio $g : A \to \mathbb{C}$ on *tasaisesti jatkuva* jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy $\delta > 0$ niin että $\|x-y\| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Olennaista tässä siis että vaadittu δ riippuu vain etäisyydestä $\|x-y\|$, eikä siitä missä pisteet x,y sijaitsevat.

Näin voimme arvioida

$$|(Tf)(x)| \leq \int_0^1 |K(x,s)|\,|f(s)|ds \leq M\|\,f\,\|_\infty$$

mikä antaa $\|\,Tf\,\|_\infty \leq M\|\,f\,\|_\infty$. Näin ollen T on rajoitettu operaattori; itse asiassa voimme valita $M = \|\,K\,\|_\infty$ ja siis saamme arvion $\|\,T\,\| \leq \|\,K\,\|_\infty$.

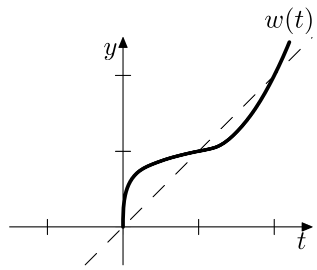
Olemme siten todistaneet viimeisenkin väitteen 3. $\square$

2.30. *Huomautus.* Yllä esitetty integraalioperaattorin jatkuvuuden todistus antaa hieman enemmänkin kuin mitä Esimerkki 2.27 tarvitsi: Havaitaan että Tf:n jatkuus riippuu olennaisesti vain ytimestä K eikä niinkään funktiosta f.

Koska tällä havainnolla on käyttöä myöhemmin, formalisoidaan sitä hieman, käyttäen jatkuvuusmodulin käsitettä: Olkoon meillä $w : [0,\infty) \to [0,\infty)$ jolle

$$t \mapsto w(t) \;\text{ jatkuva, aidosti kasvava ja }\; w(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Sanomme silloin että w on *jatkuvuusmoduli.*



Nimittäin, jos funktiolle $g : A \to \mathbb{C}$ pätee

(2.31) $$|g(x) - g(y)| \leq w(\|x-y\|) \quad \text{kaikilla } x, y \in A$$

niin w kertoo "kuinka" jatkuva g on. [Tyypillinen esim: $w(t) = t^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$]

Jos g:llä on jatkuvuusmoduli joukossa A, eli (2.31) pätee, se on selvästikin tasaisesti jatkuva (Miksi?). Mutta pätee myös kääntäen, jokaisella tasaisesti jatkuvalla funktiolla on jatkuvuusmoduli. Voimme nimittäin asettaa

$$w_0(t) = \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in A, \|x-y\| \leq t\}$$

Tasaisen jatkuvuuden nojalla w_0 on jatkuva ja $w_0(t) \to 0$ kun $t \to 0$. Aidosti kasvava siitä saadaan määrittelemällä $w(t) = w_0(t) + t$. Tälle (2.31) selvästi pätee, ja siten g:llä on jatkuvuusmoduli w.

Jos palaamme Esimerkkiin 2.27, ytimellä K on ylläolevan nojalla jatkuvuusmoduli w_K. Lisäksi, arviot (2.28), (2.29) antavat

(2.32) $$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq w_K(x-y)\|\,f\,\|_\infty \leq w_K(x-y)$$

mikäli $\|\,f\,\|_\infty \leq 1$, eli $f \in B_E,\quad E = C(0,1)$. Toisin sanoen, oli f:n jatkuvuus miten heikkoa tahansa, Tf:n jatkuvuus on aina vähintään luokkaa w_K !