10. Transpoosi ja adjungaatti

Olkoot E ja F normiavaruuksia, joilla on skalaarikuntana $\mathbb{K}$. Olkoon $T \in \mathscr{L}(E,F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Jos funktionaali $y' \in F'$, niin yhdistetty kuvaus $y' \circ T : \ E \to \mathbb{K}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, eli $y' \circ T \in E'$. Merkitään

$$T'y' := y' \circ T$$

Tällöin siis

$$T'y'(x) = (y' \circ T)(x) = y'(Tx) \iff \langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle = \langle\, Tx \,,\, y' \,\rangle,$$

kun $x \in E$ ja $y' \in F$. Kuvausdiagrammina tämä näyttää seuraavalta (vrt. Vektoriavaruudet, luku 12, §76).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T'y'"'] & & F \arrow[dl, "y'"] \\ & \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Pitäen vektoria $y' \in F'$ muuttujana toteamme, että ehto $y' \mapsto T'y'$ määrittelee kuvauksen $T' \colon F' \to E'$.

10.1. **Määritelmä.** Edellä konstruoitua kuvausta $T' \colon F' \to E'$ sanotaan operaattorin T (topologiseksi) *transpoosiksi.*

10.2. **Lause.** *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Tällöin transpoosi $T' \in \mathscr{L}(F',E')$ on jatkuva lineaarinen operaattori ja $\|\, T' \,\| = \|\, T \,\|$.*

Todistus. T' lineaarinen: Olkoot $y', z' \in F'$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sekä $x \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned}\langle\, x \,,\, T'(\alpha y' + \beta z') \,\rangle &= \langle\, Tx \,,\, \alpha y' + \beta z' \,\rangle = \alpha\langle\, Tx \,,\, y' \,\rangle + \beta\langle\, Tx \,,\, z' \,\rangle \\ &= \alpha\langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle + \beta\langle\, x \,,\, T'z' \,\rangle = \langle\, x \,,\, \alpha T'y' + \beta T'z'.\,\rangle\end{aligned}$$

Siis kuvauksina $E \to \mathbb{K}$ pätee $T'(\alpha y' + \beta z') = \alpha T'y' + \beta T'z'$.
T' jatkuva: Olkoot $y' \in F'$ ja $x \in E$. Tällöin

$$|\langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle| = |\langle\, Tx \,,\, y' \,\rangle| \le \|\, y' \,\| \; \|\, Tx \,\| \le \|\, T \,\| \; \|\, y' \,\| \; \|\, x \,\|,$$

joten

$$\|\, T'y' \,\| = \sup_{x \in B_E} |\langle\, x \,,\, T'y' \,\rangle| \le \|\, T \,\| \|\, y' \,\|,$$

kun $y' \in F'$, joten erityisesti T' on jatkuva lineaarioperaattori $F' \to E'$, ja Lauseen 8.4 sivulla 116 ja Lemman 8.10 sivulla 119 nojalla

$$\|\, T' \,\| = \sup_{y' \in B_{F'}} \|\, T'y' \,\| \le \|\, T \,\|.$$

Toisaalta, Seurauksen 9.20 mukaan

$$\begin{aligned}\| Tx \| &= \sup_{y' \in B_{F'}} |\langle Tx , y' \rangle| = \sup_{y' \in B_{F'}} |\langle x , T'y' \rangle| \le \sup_{y' \in B_{F'}} \| T'y' \| \| x \| \\ &= \| T' \| \| x \| \end{aligned}$$

Siis $\| T \| \le \| T' \|$, jolloin $\| T' \| = \| T \|$. □

Adjungaatti

Olkoon E Hilbertin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$. Kun $y \in E$, niin kuvaus $x \mapsto (Tx \mid y)$ määrittelee duaalin E' alkion. Fréchet–Rieszin lauseen nojalla on siis olemassa yksikäsitteinen $z \in E$, jolle $(Tx \mid y) = (x \mid z)$ kaikilla $x \in E$. Määrittelemmekin kuvauksen $T^* \colon E \to E$, jota nimitämme operaattorin T *adjungaatiksi*, asettamalla $T^*(y) = z$.

10.3. **Lause.** *Kun E on Hilbertin avaruus ja $T \in \mathscr{L}(E)$, niin $T^* \in \mathscr{L}(E)$ ja $\| T^* \| = \| T \|$.*

Todistus. Kuten Lauseen 10.2 todistus, mutta pienin muutoksin. □

Jätämme lukijan kiinnostuksen varaan todeta seuraavat adjungaatin ominaisuudet ($S, T \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$):

1. $T^{**} = T$
2. $(S+T)^* = S^* + T^*$
3. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$
4. $\bar{0}^* = \bar{0}$, $I^* = I$
5. T on kääntyvä avaruudessa $\mathscr{L}(E)$ jos ja vain jos T^* on kääntyvä. Tällöin $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
6. $\| T \|^2 = \| T^* T \|$

10.4. **Esimerkki.** a) Jatkuva lineaarikuvaus $T \colon E \to F$ on *äärellisasteinen*, jos on olemassa sellaiset funktionaalit $x'_1, \dots, x'_n \in E'$ ja vektorit $y_1, \dots, y_n \in F$ jollakin $n \in \mathbb{N}$, että

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x , x'_k \rangle y_k,$$

kun $x \in E$.[15] Määrätään transpoosi T': Jos $y' \in F'$ ja $x \in E$, niin

$$\begin{aligned}\langle Tx , y' \rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x , x'_k \rangle y_k , y' \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x , x'_k \rangle \langle y_k , y' \rangle \\ &= \Big\langle x , \sum_{k=1}^{n} \langle y_k , y' \rangle x'_k \Big\rangle = \langle x , T'y' . \rangle\end{aligned}$$

[15] Kääntäen, jos $T \in \mathscr{L}(E,F)$ ja $\dim T(E) < \infty$, voidaan osoittaa, että on olemassa sellaiset $x'_1, \dots, x'_n \in E'$ ja $y_1, \dots, y_n \in F$, joille edellinen pätee.

Koska edellinen identiteetti on voimassa kaikilla $x \in E$, niin päättelemme, että

$$T'y' = \sum_{k=1}^{n} \langle\, y_k \,,\, y' \,\rangle x'_k.$$

Siispä myös transpoosi $T' \colon F' \to E'$ on äärellisasteinen.

b) Olkoon $T : \ell^1 \to c_0$ kuvaus

$$Tx = (\sum_{j=1}^{\infty} x_j, \sum_{j=2}^{\infty} x_j, \dots),$$

kun $x = (x_j) \in \ell^1$. Selvästi T on lineaarinen ja

$$\| Tx \|_\infty = \sup_n \Big| \sum_{j=n}^{\infty} x_j \Big| \le \sup_n \sum_{n=j}^{\infty} |x_j| \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \| x \|_1,$$

joten $T \in \mathscr{L}(\ell^1, c_0)$. Määrätään $T' : c_0' \to (\ell^1)'$. Koska $c_0' = \ell^1$ ja $(\ell^1)' = \ell^\infty$, niin $T' \colon \ell^1 \to \ell^\infty$. Lisäksi, kun $z' = (z_n) \in \ell^\infty$, niin $z_k = \langle\, e_k \,,\, z' \,\rangle$, kun $k = 1, 2, \dots$ ja $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^1$.

Olkoon $x' = (y_k) \in \ell^1$ mielivaltainen. Tällöin jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ on

$$\langle\, e_k \,,\, T'x' \,\rangle = \langle\, Te_k \,,\, x' \,\rangle = \sum_{j=1}^{k} y_j,$$

sillä $Te_k = (1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots)$. Siis

$$T'x' = (\sum_{j=1}^{n} y_j)_{n \in \mathbb{N}} = (y_1, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3, \dots)$$

kun $x' = (y_k) \in \ell^1$.