VARIAATIOLASKENTA

1. KERTAUSTA : FUNKTION ÄÄRIARVOT

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^2(M) \qquad M \subset \mathbb{R}^n$$

$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ON f:n LOKAALIINEN MAKSIMI / MINIMI JOS ON OLEMASSA x^0:N AVOIN YMPÄRISTÖ U_{x^0} S.E.

$f(x) \leq f(x^0)$
$f(x) \geq f(x^0)$ KAIKILLE $x \in U_{x^0} - \{x^0\}$ ÄÄRIARVOT

$$f(x^0+h) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x=x^0} h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x_0} h_i h_j + \cdots$$

OLKOON x^0 LOKAALINEN MAKSIMI

VALITAAN $h = (0, 0, \ldots, k, 0, \ldots, 0)$
(k: i:S PAIKKA)

OLETETAAN : $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_0} \gtrless 0$. TÄLLÖIN

$$f(x^0+h) \approx f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_0} \cdot k > f(x^0) \quad \text{KUN} \quad \begin{matrix} k > 0 \\ k < 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ x^0 EI MAKSIMI RISTIRIITA

$\Rightarrow$ PITÄÄ OLLA $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_0} = 0 \quad i = 1, \ldots, n$

(PÄÄTTELY MINIMIN TAPAUKSESSA SAMANKALTAINEN)

PISTEET x JOILLE $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n$ OVAT f:N STATIONAARISIA PISTEITÄ :

$$f(x^0+h) = f(x^0) + O(h^2)$$

NELIÖMUODOT : $A(h) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} h_i h_j$

$A(h) = 0$ KUN $h = 0$ (S.O. $h_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n$)

JOS $A(h) \neq 0 \quad \forall\, h \neq 0$ A ON DEFINIITTI MUOTO

STATIONAARINEN PISTE x^0 ON MAKSIMI / MINIMI JOS

$$D = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x_0} h_i h_j$$

ON NEGATIIVINEN / POSITIIVINEN DEFINIITTI MUOTO

JOS D ON INDEFINIITTI , S.O. $D(h) > 0$ JOILLEKIN h JA $D(h) < 0$ TOISILLE h , x^0 ON SATULAPISTE

ESIM. $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$ $\Rightarrow$ $(x,y) = (0,0)$ ON STATIONAARINEN

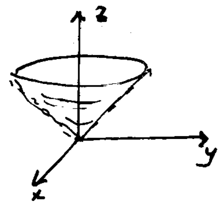
$D(h) = 2(h_1^2 - h_2^2)$ INDEFINIITTI

$(0,0)$ SATULAPISTE

HUOM. $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0} = 0$ ON VÄLTTÄMÄTÖN EHTO SILLE, ETTÄ MIN SISÄPISTE x_0, JOSSA f DIFFERENTIOITUVA, ON ÄÄRIARVOPISTE.

ON ERIKSEEN TARKASTETTAVA : - PISTEET, JOSSA f EI DIFFERENTIOITUVA
- REUNAT

ESIM. 1. $z(x,y) = +\sqrt{x^2+y^2}$



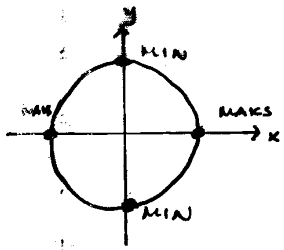
MINIMI ON ILMEISESTI $z(0,0) = 0$

MUTTA

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ EIVÄT OLE OLEMASSA PISTEESSÄ $(0,0)$

2. $f(x,y) = (x^2-y^2)$, $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$ $f = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta$



MAKSIMI : $r = 1$, $\theta = 0, \pi$ $f = 1$

MINIMI : $r = 1$ $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ $f = -1$

MUTTA

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 2 \neq 0$ JNE.

SIDOTUT ÄÄRIARVOT

ETSITÄÄN FUNKTION $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ÄÄRIARVO

SIDOSEHDOILLA
$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (m < n)$$
$$\vdots$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

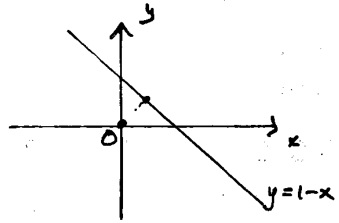
MAHDOLLINEN STRATEGIA : RATKAISTAAN SIDOSEHDOISTA m MUUTTUJAA $n-m$:N MUUTTUJAN FUNKTIOINA (ESIM. $x_1 = x_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m = x_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)$), SIJOITETAAN f:ÄÄN, ETSITÄÄN FUNKTION

$$g(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(x_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

ÄÄRIARVOT.

ESIM. ETSI FUNKTION $f(x,y) = x^2+y^2$ ÄÄRIARVOT KUN $\varphi(x,y) = x+y-1 = 0$

(ELI ETSI SUORAN $y = 1-x$ PISTE, JOKA ON LÄHIN ORIGOA



RATK. $y = 1-x$, SIJ.

$f(x, 1-x) = x^2+(1-x)^2 = 2x^2-2x+1 = g(x)$

MINIMI : $g'(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ MINIMI SAAVUTETAAN PISTEESSÄ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ JA ON

$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

TOINEN TAPA: **LAGRANGEN KERTOIMET**
(JOSEPH-LOUIS LAGRANGE 1736 – 1813)

MUODOSTETAAN $\Phi(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1,\dots,x_n)$

ETSITÄÄN FUNKTION Φ STATIONAARISET PISTEET:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} = \varphi_j(x_1,\dots,x_n) = 0 \end{cases}$$

ESIM.

$$\Phi(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x+y-1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= 2y + \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow x = y = \frac{1}{2} \quad \text{OK.}$$

2. FUNKTIONAALIT

FUNKTIONAALILLA ("FUNKTIO FUNKTIOSTA") TARKOITETAAN KUVAUSTA JOSTAKIN FUNKTIOIDEN LUOKASTA $M \to$ REAALILUKUIHIN $\mathbb{R}$

MERK. $F[y]$

ESIMERKKEJÄ:

1) DISTRIBUUTIOT: LINEAARISET FUNKTIONAALIT

$\{\text{TESTIFUNKTIOT}\} \to \mathbb{R}$

ESIM. δ-FUNKTIO $\delta(x-x_0)$: $y(x) \mapsto y(x_0)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x-x_0)\, y(x)$$

2) $F[y] = \int_a^b dx\, [y(x)]^p$

JOS $p \geq 0$ TÄMÄ ON MÄÄRITELTY JOUKOSSA $M = \{$PALOITTAIN JATKUVAT FUNKTIOT $[a,b]$:LLÄ$\}$ TAI SEN OSAJOUKOSSA

3) "FUNKTIONAALIEN TAYLORIN SARJA":

$$F[y] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b dx_1\, dx_2 \cdots dx_n\, \underbrace{K_n(x_1,x_2,\dots,x_n)}_{\text{TÄYSIN SYMMETRINEN}}\, y(x_1)\, y(x_2) \cdots y(x_n)$$

JOS "YDINFUNKTIOIKSI" (KERNEL FUNCTIONS) K_n SALLITAAN MYÖS DISTRIBUUTIOITA, TÄMÄ

ON VARSIN YLEINEN FUNKTIONAALIN ESITYS

ESIM. $F[y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, [y'(x)]^2$, $M = S_1$

VOIDAAN KIRJOITTAA MUOTOON

$$F[y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \; K_2(x_1, x_2) \, y(x_1) \, y(x_2)$$

KUN $K_2(x_1, x_2) = -\delta''(x_1 - x_2)$

($\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \, \delta''(x_1 - x_2) \, y(x_1) = y''(x_2) \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \left(-\delta''(x_1 - x_2)\right) y(x_1) \, y(x_2) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \; y''(x_2) \, y(x_2)$$

$$= \underbrace{-\Big/_{-\infty}^{\infty} y'(x_2) \, y(x_2)}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \, [y'(x_2)]^2 \quad)$$

VARIAATIOLASKENNASSA TARKASTELLAAN FUNKTIONAALEJA MUOTOA

$$J[y] = \int_a^b dx \; f(y, y', x)$$

VARIAATIOLASKENNAN PERUSONGELMA : LÖYDÄ $J[y]$:N ÄÄRIARVOT JOUKOSSA $\{ y(x) \in C^2([a,b])$; $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ KIINNITETTYJÄ $\}$

3. EULERIN YHTÄLÖ

JOHDAMME VÄLTTÄMÄTTÖMÄN EHDON $J[y]$:N ÄÄRIARVOLLE : LÖYDÄMME NE $y(x)$, JOILLE $J[y]$ ON STATIONAARINEN :

VARIAATIOSSA $y(x) \longrightarrow y(x) + \eta(x)$, "PIENI"

$\eta(a) = \eta(b) = 0$, J:N MUUTOS η:N 1. KERTALUVUSSA HÄVIÄÄ: $\delta J = 0$

LASKETAAN :

$$J[y + \eta] = \int_a^b dx \; f(y + \eta, y' + \eta', x)$$

$$= \underbrace{\int_a^b dx \; f(y, y', x)}_{J[y]} + \int_a^b dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' \right) + O(\eta^2)$$

VIIMEINEN TERMI INTEGROIDAAN OSITTAIN :

$$\int_a^b dx \; \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' = \underbrace{\Big/_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \eta}_{=0 \text{ KOSKA } \eta(a) = \eta(b) = 0} - \int_a^b dx \; \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$\Rightarrow \delta J = J[y + \eta] - J[y] = \int_a^b dx \; \eta(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

TÄMÄ VOI TOTEUTUA MIELIVALTAISILLE VARIAATIOILLE $\eta(x)$ VAIN JOS

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

EULERIN YHTÄLÖ

(APULAUSE : JOS $\varphi(x)$ ON JATKUVA FUNKTIO JA

$$\int_a^b dx\, \eta(x)\varphi(x) = 0 \quad \text{KAIKILLE JATKUVILLE } \eta(x)$$

NIIN $\varphi(x) = 0 \quad x \in [a,b]$

TODISTUS : OLETETAAN $\varphi(y) \neq 0$ JOSSAKIN $y \in [a,b]$

φ JATKUVA, LÖYTYY ε S.E $\varphi(x) \neq 0$ $y-\varepsilon < x < y+\varepsilon$

JA SAMANMERKKINEN KOKO VÄLILLÄ $[y-\varepsilon, y+\varepsilon)$

VALITAAN $\eta(x) = (x-y+\varepsilon)^2(x-y-\varepsilon)^2 \quad x \in [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$

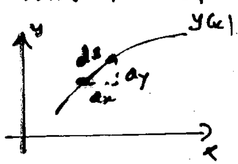
$= 0$ MUUALLA

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, \eta(x)\varphi(x) = \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} dx\, \eta(x)\varphi(x) \quad \begin{matrix} >0 & \text{JOS } \varphi(y)>0 \\ <0 & \varphi(y)<0 \end{matrix}$$

RISTIRIITA $\Rightarrow \varphi(x) = 0$)

ESIMERKKEJÄ

1) LÖYDÄ LYHIN KÄYRÄ JOKA YHDISTÄÄ KAKSI TASON PISTETTÄ



RATK.: KÄYRÄN $y = y(x)$ KAAREN PITUUSALKIO

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

PISTEET
A : $(a, y(a) = y_a)$
B : $(b, y(b) = y_b)$

$$J = \int_A^B ds = \int_a^b dx \underbrace{\sqrt{1+(y')^2}}_{f(y,y')}$$

EULER : $\displaystyle \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{=0} = \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$

$$\frac{d}{dx}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}} = 0$$

TÄMÄ ON 2. ASTEEN DY, MUTTA LÖYDÄMME VÄLITTÖMÄSTI ENSIMMÄISEN INTEGRAALIN

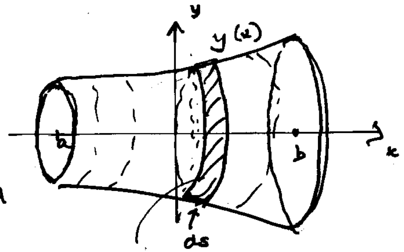
$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C = \text{VAKIO}$$

$$\Rightarrow (y')^2 = \frac{C^2}{1-C^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = K = \sqrt{\frac{C^2}{1-C^2}} = \text{VAKIO}$$

$\Rightarrow y(x) = \alpha x + \beta$ SUORA

(α, β VALITTAVA S.E. $y(a) = \alpha a + \beta = y_a$
$y(b) = \alpha b + \beta = y_b$)

2) PIENIMMÄN PINTA-ALAN PYÖRÄHDYSPINNAT ("SAIPPUAKALVON MUOTO")



JOS KÄYRÄ $y(x)$ PYÖRÄHTÄÄ X-AKSELIN YMPÄRI, SEN GENEROIMAN PINNAN PINTA-ALA

$$A = 2\pi \int_a^b dx \underbrace{y\sqrt{1+(y')^2}}_{f} = A[y] \qquad dA = 2\pi y\, ds = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}$$

$$\delta A = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\left(y\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) - \sqrt{1+(y')^2} = 0$$

KUN $f = f(y, y', x)$ EI RIIPU X:STÄ $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0\right)$

LÖYTYY AINA EULERIN YHTÄLÖN 1. INTEGRAALI:

$$f = f(y, y'; x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' =$$

EULER: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

JOS NYT $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ SAADAAN

$$\frac{d}{dx}\left(f - y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

ELI $f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = C$ = VAKIO 1. INTEGRAALI

NÄIN EULERIN YHTÄLÖ (2. ASTEEN YHTÄLÖ) REDUSOITUU 1. ASTEEN YHTÄLÖKSI

SAIPPUAKALVO-ONGELMASSA $f = f(y, y') = y\sqrt{1+(y')^2}$

1. INTEGRAALI $\underbrace{y\sqrt{1+(y')^2} - y' y \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}}_{= \frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}} = c_1$ = VAKIO

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{c_1}\sqrt{y^2 - c_1^2}$ SEPAROITUU

$$\frac{c_1\, dy}{\sqrt{y^2 - c_1^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad c_1 \cosh^{-1}\frac{y}{c_1} = x - c_2$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right)$$

"KATENOIDI"

4. YLEISTYS MONEN FUNKTION FUNKTIONAALIIN

$$J = J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b dx\, f(y_1, \dots, y_n; y_1', \dots, y_n'; x)$$

$y_i(a) = y_{ai}$
$y_i(b) = y_{bi}$ $i = 1, \dots, n$ KIINNITETYT

VARIOIDAAN $y_i(x) \longrightarrow y_i(x) + \eta_i(x)$

$$\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$$

$$\delta J = \int_a^b dx \sum_{i=1}^n \eta_i(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0} \qquad i = 1, \dots, n$$

LAGRANGEN MEKANIIKKA

MASSAPISTE (MASSA m, RATA $\vec{r}(t)$) LIIKKUU POTENTIAALISSA $V(\vec{r})$ (VOIMA $\vec{F} = -\nabla V$)

LIIKE-ENERGIA $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$ $\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$

POTENTIAALIENERGIA $V(\vec{r})$

PIENIMMÄN VAIKUTUKSEN PERIAATE:

LIIKERATA $\vec{r}(t)$ $\vec{r}(t_a) = \vec{r}_a$:STA $\vec{r}(t_b) = \vec{r}_b$:HEN MINIMOI (PAREMMIN: TEKEE STATIONAARISEKSI) VAIKUTUSFUNKTIONAALIN S

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \, \underbrace{(T - V)}_{\equiv L} \quad \text{LAGRANGEN FUNKTIO}$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \right)$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(2\dot{\vec{r}}) + \vec{\nabla} V(\vec{r}) = 0 \quad \text{ELI}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V = \vec{F} \quad \text{NEWTON}$$

ESIM. HARMONINEN VÄRÄHTELIJÄ (1-UL.)

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right)$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \qquad \text{MERK } \frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\Rightarrow x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

OLKOON $t_a = 0$, $t_b = \tau$

$$\Rightarrow x_a = B$$

$$x_b = A \sin \omega \tau + x_a \cos \omega \tau$$

$$\Rightarrow A = \frac{x_b - x_a \cos \omega \tau}{\sin \omega \tau}$$

5. YLEISTYS MONEN MUUTTUJAN FUNKTIOIHIN

$$y(\vec{x}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \partial_x y \equiv \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{JNE}$$

$$J[y] = \int_V d^3x \, f(y, \partial_x y, \partial_y y, \partial_z y, \vec{x})$$

ETSITÄÄN STATIONAARINEN ARVO KUN $y(\vec{x})$ REUNALLA ∂V ON KIINNITETTY: $y(\vec{x}) = y_R(\vec{x})$ $\vec{x} \in \partial V$

VARIOIDAAN $y(\vec{x}) \to y(\vec{x}) + \eta(\vec{x})$, $\eta(\vec{x}) = 0$ $\vec{x} \in \partial V$

NYT

$$J[y+\eta] = \int_V d^3x \, f(y+\eta, \partial_x y + \partial_x \eta, \ldots, \vec{x})$$

$$= \int_V d^3x \, f(y, \partial_x y, \ldots, \vec{x}) + \int_V d^3x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial f}{\partial(\partial_i y)} \partial_i \eta \right)$$

OSITTAISINTEGROINTI:

$$\int_V d^3x \sum_i \frac{\partial f}{\partial(\partial_i y)} \partial_i \eta = \int_V d^3x \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_i y)} \eta \right)$$

$$- \int_V d^3x \, \eta \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_i \eta)} \right) \overset{\text{GAUSS}}{=} \underbrace{\int_{\partial V} d^2S_i \frac{\partial f}{\partial(\partial_i y)} \eta}_{= 0 \text{ KOSKA } \eta = 0 \ \partial V\text{:LLÄ}}$$

$$- \int_V d^3x \, \eta \sum_{i=x,y,z} \partial_i \left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_i y)} \right)$$

$$\Rightarrow \delta J = J[y+\eta] - J[y] = \int_V d^3x \, \eta(\vec{x}) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=x,y,z} \partial_i \left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_i y)} \right) \right)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_x y)}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_y y)}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial(\partial_z y)}\right) = 0}_{}$$

EULER

JOS $y : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ SAADAAN VASTAAVASTI

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial(\partial y/\partial x_i)}\right) = 0}$$

JOS $J = \int d^D x\, f(y_1, \dots, y_n, \dots \partial_i y_j \dots, \vec{x})$

EULERIN YHTÄLÖT OVAT

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_k} - \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial(\partial y_k/\partial x_i)}\right) = 0} \qquad k = 1, \dots, n$$

ESIMERKKI: SKALAARIKENTTÄ MINKOWSKI-AVARUUDESSA
$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$

$$S = \int dt\, d^3x \left(\frac{1}{2c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right)$$

$\delta S = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}m^2 2\varphi - \frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\cdot 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}2\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2\right)\varphi + m^2\varphi = 0$$ KLEIN-GORDON -YHTÄLÖ

(OSKAR KLEIN 1894 – 1977, WALTER GORDON 1893 – 1939)

6. SIDOTTU (EHDOLLINEN) VARIAATIOPROBLEEMA

ETSITÄÄN FUNKTIONAALIN

$$J = \int_V \prod_i^D dx_i\; f\left(y_j, \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, x_i\right)$$

STATIONAARISET ARVOT EHTOJEN

$$\varphi_k\left(y_j, \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, x_i\right) = 0 \qquad k = 1, \dots, \bar{K}$$

VALLITESSA ($\varphi_k = \varphi_k(y_j, x_i)$ HOLONOMISET SIDOSEHDOT
$\varphi_k = \varphi_k(y_j, \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, x_i)$ EI-HOLONOMISET)

KÄYTTÖKELPOISIN TIE ON LAGRANGEN KERTOJIEN (KERTOIMIEN) KÄYTTÖ: ETSITÄÄN FUNKTIONAALIN

$$K = \int_V \prod_i^D dx_i \left(f + \sum_{k=1}^{\bar{K}} \lambda_k(x_i)\,\varphi_k\left(y_j, \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, x_i\right)\right)$$

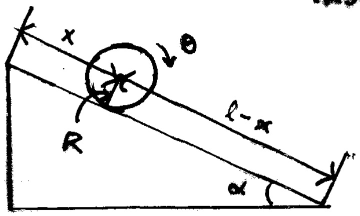
STATIONAARISET ARVOT VARIOIMALLA FUNKTIOT y_j JA λ_k. MERK $g = f + \sum_k \lambda_k \varphi_k$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^{D} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial g}{\partial(\partial y_j/\partial x_i)} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_k} - \sum_{i=1}^{D} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial g}{\partial(\partial \lambda_k/\partial x_i)} =$$

$$= \varphi_k\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, x\right) = 0$$

ESIMERKKI : PYÖREÄ KAPPALE VIERII KALTEVAA TASOA ALAS



$$T = \tfrac{1}{2}\underset{\text{MASSA}}{M}\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\underset{\text{HITAUSMOMENTTI}}{I}\dot{\theta}^2$$

$$V = Mg(l-x)\sin\alpha$$

SIDOSEHTO : $\dot{x} = R\dot{\theta}$

MINIMOITAVA

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \big(T - V + \lambda(t)(\dot{x} - R\dot{\theta})\big)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \Big(\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mg\sin\alpha(l-x) + \lambda(t)(\dot{x} - R\dot{\theta})\Big)$$

EULER :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = M\ddot{x} + \dot{\lambda} - Mg\sin\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} - R\dot{\lambda} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = R\dot{\theta} - \dot{x} = 0 \quad (3)$$

$(2) \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{I}{R}\ddot{\theta}$, SIJ. YHTÄLÖÖN (1)

$$\Rightarrow M\ddot{x} + \frac{I}{R}\ddot{\theta} - Mg\sin\alpha = 0$$

$(3) \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R}$, SIJ. $\Rightarrow \left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} = Mg\sin\alpha$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{Mg\sin\alpha}{M + I/R^2}t^2 + v_0 t + x_0 \qquad v_0 = \dot{x}(0),\quad x_0 = x(0)$$

$(3) \Rightarrow \theta(t) = \frac{x(t)}{R} + \theta_0$ $\quad$ ~~$\theta_0 = \theta(0)$~~ $\quad \theta(0) = \frac{x_0}{R} + \theta_0$

7. ISOPERIMETRINEN ONGELMA

SIDOSEHTO FUNKTIONAALI :

ETSI FUNKTIONAALIN

$$J = \int_a^b dx\, f(y, y', x)$$

ÄÄRIARVO EHDOLLA

$$K = \int_a^b dx\, g(y, y', x) = C = \text{VAKIO}$$

TÄMÄKIN RATKEAA HELPOIMMIN LAGRANGEN KERTOIMEN AVULLA, NYT KERROIN ON LUKU EIKÄ FUNKTIO :

ETSITÄÄN FUNKTIONAALIN

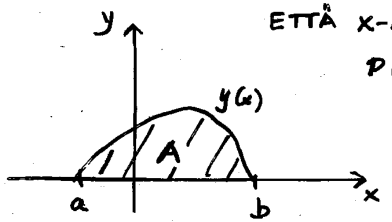
$$L_\lambda[y] = J[y] + \lambda(K[y] - C)$$

STATIONAARISET PISTEET

$$\Rightarrow \text{EULER} \quad \frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial y'} = 0$$

$$\text{JA} \quad \frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda} = K[y] - C = 0$$

ESIMERKKI: YHDISTÄ x-AKSELIN PISTEET a JA b ANNETUN PITUISELLA KÄYRÄLLÄ SITEN, ETTÄ x-AKSELIN JA KÄYRÄN VÄLIIN JÄÄVÄ PINTA-ALA ON MAHDOLLISIMMAN SUURI



VOIMME OLETTAA $y(x) \geq 0$

$$J[y] = \int_a^b dx\, y(x)$$

EHTO $$K[y] = \int_a^b dx \sqrt{1+(y')^2} = \ell$$

$$\Rightarrow L_\lambda[y] = \int_a^b dx \left(y + \lambda\sqrt{1+(y')^2} \right) - \lambda \ell$$

EULER : $$\lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\lambda}(x - C_1)$$ RATKAISE $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2}} = \mp \frac{d}{dx}\sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2}$$

$$\Rightarrow y - C_2 = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2$$

YMPYRÄN YHTÄLÖ
KESKIPISTE (C_1, C_2)
SÄDE $R = \lambda$

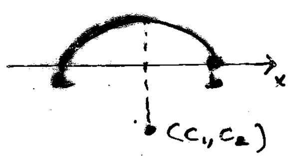
$x = a \quad y = 0 \qquad (a-C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2$

$x = b \quad y = 0 \qquad (b-C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\Rightarrow C_2^2 = \lambda^2 - (b-C_1)^2 = \lambda^2 - \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\Rightarrow C_2 = -\sqrt{\lambda^2 - \frac{(b-a)^2}{4}}$$



(ETUMERKKI SELVÄ GEOMETRIASTA)

$$K = \int_a^b dx \sqrt{1+(y')^2} = \lambda \int_a^b dx \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - (x-C_1)^2}} = \qquad t = \frac{x - C_1}{\lambda}$$

$$= \lambda \int_{-(b-a)/2\lambda}^{(b-a)/2\lambda} dt \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \underbrace{2\lambda \sin^{-1}\left(\frac{b-a}{2\lambda}\right) = \ell}_{\text{YHTÄLÖ JOKA MÄÄRÄÄ } \lambda\text{:N}}$$

8. TOINEN VARIAATIO

JOHDAMME NYT VÄLTTÄMÄTTÖMÄN EHDON SILLE, ETTÄ FUNKTIONAALIN

$$J[y] = \int_a^b dx\, f(y, y', x)$$

STATIONAARINEN "PISTE" $\bar{y}(x)$ (EULERIN YHTÄLÖN RATKAISU) ON MINIMI TAI MAKSIMI. OLETAMME, ETTÄ f:LLÄ ON JATKUVAT TOISET DERIVAATAT y:N JA y':N SUHTEEN

LASKETAAN J:N ARVO FUNKTIOLLE

$$y(x) = \bar{y}(x) + \underset{\text{PIENI}}{\alpha}\, \eta(x), \qquad \eta(a) = \eta(b) = 0$$

$$J[\bar{y} + \alpha\eta] = J[\bar{y}] + \alpha \int_a^b dx \overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_{y=\bar{y}}}^{=0 \text{ (EULER)}} \eta(x)$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{2}\alpha^2 \int_a^b dx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2(x) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\eta(x)\eta'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}(\eta'(x))^2 \right)}_{\equiv \delta^2 J \text{ "TOINEN VARIAATIO"}}$$

$$+ O(\alpha^3)$$

KOSKA $2\eta\eta' = \frac{d}{dx}(\eta^2)$ VOIDAAN $\delta^2 J$:N KESKIMMÄISTÄ TERMIÄ INTEGROIDA OSITTAIN $\Rightarrow$

$$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2}\int_a^b dx \left[\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \right)_{y=\bar{y}}}_{\equiv S(x)} \eta^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}\Big|_{y=\bar{y}}}_{\equiv R(x)} (\eta')^2 \right]$$

OLETTAKAAMME NYT, ETTÄ $y = \bar{y}(x)$ ANTAA J:N <u>MINIMIN</u>. TÄLLÖIN PITÄÄ OLLA

$\delta^2 J \geq 0$ KAIKILLE $\eta(x)$. OSOITAMME, ETTÄ TÄLLÖIN VÄLTTÄMÄTTÄ $R(x) \geq 0$, $a < x < b$

TEHDÄÄN VASTAOLETUS: LÖYTYY PISTE $x = c$ S.E. $R(c) < 0$. KOSKA $R(x)$ ON JATKUVA, $\exists\ \Delta > 0$ S.E. $R(x) < 0$ $c-\Delta \leq x \leq c+\Delta$. VALITAAN $\varepsilon > 0$ S.E. $0 < \varepsilon < \Delta$ JA

$$\eta(x) = [x-(c-\varepsilon)]^2\,[x-(c+\varepsilon)]^2 \qquad c-\varepsilon \leq x \leq c+\varepsilon$$
$$= 0 \qquad \text{MUUALLA}$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, S(x)\,\eta^2(x) \overset{\varepsilon \to 0}{\simeq} S(c)\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} dx\, \eta^2(x) = S(c)\,\frac{256}{315}\,\varepsilon^9$$

$$\int_a^b dx\, R(x)(\eta'(x))^2 \simeq R(c)\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} dx\,(\eta'(x))^2 = R(c)\,\frac{256}{105}\,\varepsilon^7 < 0$$

VALITSEMALLA ε RIITTÄVÄN PIENEKSI $\varepsilon^9 \ll \varepsilon^7$ JA

$$\delta^2 J \simeq \frac{\alpha^2}{2} R(c)\,\frac{256}{105}\,\varepsilon^7 < 0$$

MIKÄ ON RISTIRIIDASSA SEN KANSSA, ETTÄ $y = \bar{y}$ ON MINIMI.

$\Rightarrow$ VÄLTTÄMÄTÖN EHTO SILLE, ETTÄ EULERIN YHTÄLÖN RATKAISU $y = \bar{y}(x)$ ON FUNKTIONAALIN

$$J[y] = \int_a^b dx\, f(y, y', x)$$

MINIMI ON

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}\Big|_{y=\bar{y}(x)} \geq 0 \qquad a < x < b$$

(<u>LEGENDREN</u> <u>EHTO</u>)

JOS $\bar{y}(x)$ ON <u>MAKSIMI</u>, PITÄÄ OLLA $\delta^2 J \leq 0$ KAIKILLE $\eta(x)$ JA EHDOKSI SAADAAN

LEGENDREN EHTO MAKSIMILLE:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (y')^2}\Big|_{y=\bar{y}(x)} \leq 0 \qquad a < x < b$$

<u>HUOM.</u> LEGENDREN EHDOT EIVÄT OLE RIITTÄVIÄ, $y = \bar{y}(x)$ VOI OLLA SATULAPISTE VAIKKA EHTO TÄYTTYY