OLETAMME ALUKSI : KERTOIMET A_{ij} <u>VAKIOITA</u>

SUORITETAAN MUUTTUJANVAIHDOS

$$x_i \to \xi_i = \sum_{k=1}^{n} O_{ik}\, x_k \quad \leftarrow \text{VAKIOITA}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} O_{ki}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} O_{ki} O_{lj},$$

$$\text{JOTEN } \sum_{ij} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{ij=1}^{n} O_{ki} A_{ij} O_{lj}\right)}_{(O A O^T)_{kl}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}$$

$$A^T = A$$

MAPU (HONKONEN, PERKO, PITKÄNEN LUKU 5.3
ARFKEN-WEBER LUKU 3)

LÖYTYY AINA SELLAINEN (ORTOGONAALINEN) MATRIISI O ETTÄ

$$O A O^T = A_{diag.} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_i A:N OMINAISARVOT

$$\text{SIIS } \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2}$$

YHTÄLÖ

$$\sum_{ij} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \tilde{F}\left(\xi, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$$

LUOKITELLAAN OMINAISARVOJEN $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ AVULLA SEURAAVASTI

1. <u>ELLIPTINEN YHTÄLÖ</u> :

KAIKKI $\lambda_k \neq 0$ JA SAMANMERKKISIÄ

ESIM.:	LAPLACE	$\nabla^2 u = 0$
	POISSON	$\nabla^2 u = f$
	HELMHOLTZ	$(\nabla^2 \pm k^2) u = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (n=3)$$

NORMAALIMUOTO : OL. $\lambda_k > 0$ (JOS < 0, KERROTAAN YHTÄLÖ ENSIN -1 :LLÄ)

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\xi_k \qquad \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} + \tilde{F}\left(z, u, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

(2.) HYPERBOLINEN YHTÄLÖ

KAIKKI $\lambda_k \neq 0$, MUTTA ERIMERKKISET

ESIM. AALTOYHTÄLÖ $(x_0 = t,\ x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = f \qquad \left(\begin{array}{l} f=0 \text{ HOMOG.} \\ f\neq 0 \text{ EPÄHOMOG.} \end{array}\right)$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

NORMAALIMUOTO : OLKOOT $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p > 0$

$\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n < 0$

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_k|}}\,\xi_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} - \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} + F = 0$$

(3.) PARABOLINEN

VÄHINTÄÄN YKSI $\lambda_k = 0$

(NORMAALINEN PARABOLINEN: YKSI $\lambda = 0$, MUUT SAMANMERKKISIÄ)

ESIM. DIFFUUSIOYHTÄLÖ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}$$

JOS $A_{ij} = A_{ij}(x)$ VOI YHTÄLÖN TYYPPI VAIHDELLA PISTEESTÄ TOISEEN

ESIMERKKEJÄ:

1. TRICOMIN YHTÄLÖ

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$y < 0$ HYPERBOLINEN

$y > 0$ ELLIPTINEN

2. YLEINEN KAHDEN MUUTTUJAN TAPAUS

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F = 0$$

OMINAISARVOT SAADAAN YHTÄLÖSTÄ

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ELI

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}$$

$$= \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+c)^2}{4} - ac + b^2}$$

$D = \det \mathbb{A} = ac - b^2$

$D > 0$ ELLIPTINEN

$D < 0$ HYPERBOLINEN

$D = 0$ PARABOLINEN

KARAKTERISTISET PINNAT

OVAT PINNAT $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, MISSÄ ω TOTEUTTAA EPÄLINEAARISEN ODY:n

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right]_{\omega=0} = 0 \qquad \text{(KAR)}$$

TAPAUKSESSA $n=2$ $\omega(x,y)=0$ ON KÄYRÄ (KARAKTERISTIKA)

MUUTTUJISSA $\xi_i = \sum_k O_{ik} x_k$

$$\text{(KAR)} \Leftrightarrow \sum_{k,l} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_l} \Big(\sum_{i,j} O_{ki} A_{ij} O_{lj} \Big) = \sum_k \lambda_k \Big(\frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \Big)^2 = 0$$

ELLIPTINEN YHTÄLÖ : EI (REAALISIA) KAR. PINTOJA

HYPERBOLINEN : $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi_k}\right)^2 = \sum_{k=p+1}^{n} (-\lambda_k) \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi_k}\right)^2$

RATKAISUJA LÖYTYY

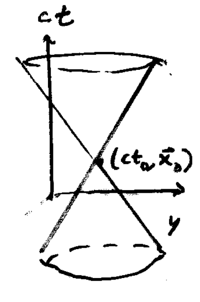
ESIM. 3-UL. AALTOYHTÄLÖ $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) u = 0$

$\omega = \omega(t, \vec{x})$

(KAR) : $\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - (\vec{\nabla}\omega)^2 = 0$

RATK. : $\omega(t,\vec{x}) = c^2(t-t_0)^2 - (\vec{x}-\vec{x}_0)^2$

"VALOKARTIOT"



MYÖS $\omega(t,\vec{x}) = ct + \vec{e}\cdot\vec{x} - C$, $|\vec{e}|=1$, C = VAKIO

"VALOLUONTOISET TASOT"

= VALOKARTIOIDEN TANGENTTITASOJA

VAKIOKERTOIMINEN KAHDEN MUUTTUJAN HOMOG. YHTÄLÖ

$$L(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

RATKEAA "AALTORINTAMAMENETELMÄLLÄ" : TEHDÄÄN YRITE

$$u(x,y) = F(\omega(x,y))$$

$$L(u) = F''(\omega)\left(a\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2\right) + F'(\omega) L(\omega)$$

JOS $\omega = \alpha x + \beta y$ $\quad L(\omega) = 0$,

JA $L(u) = 0$ ON $a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = 0$

(HUOM. SUORAT $\omega = C$ = VAKIO OVAT YHTÄLÖN KARAKTERISTIKAT !)

JAETAAN α^2:LLA :

$$c\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2b\frac{\beta}{\alpha} + a = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{c}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)$$

(1) $D = ac - b^2 < 0$ HYPERBOLINEN

MOLEMMAT JUURET REAALISIA

$$\frac{\beta}{\alpha} = r_{1,2} = \frac{1}{c}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right)$$

YLEINEN RATKAISU

$$u(x,y) = F\left(\alpha\left(x + \frac{\beta_1}{\alpha_1}y\right)\right) + G\left(\alpha\left(x + \frac{\beta_2}{\alpha_2}y\right)\right)$$

$$= f(x + r_1 y) + g(x + r_2 y)$$

f, g MIELIV. KAHDESTI DIFFERENTIOITUVIA

(2) $D = ac - b^2 = 0$ PARABOLINEN

JUURET YHTYVÄT $r_1 = r_2 = -b/c \equiv r$

YKSI RATKAISU $u(x,y) = f(x + ry)$

TOINEN RATKAISU ON ESIM.

$$y \cdot g(x + ry)$$

$$\left[\text{TOD. } L(y\,g(x - \tfrac{b}{c}y)) = y\,g''(x - \tfrac{b}{c}y)\underbrace{\left(a - \frac{2b^2}{c} + \frac{b^2}{c}\right)}_{\frac{ac-b^2}{c} = 0} + g'(x - \tfrac{b}{c}y)\underbrace{(2b - 2b)}_{=0} = 0\right]$$

(3) $D = ac - b^2 > 0$ ELLIPTINEN

JUURET KOMPLEKSISA $r_1 = r_2^*$

$$r = \frac{1}{c}\left(-b + i\sqrt{ac - b^2}\right) = r_1$$

$$r^* = \frac{1}{c}\left(-b - i\sqrt{ac - b^2}\right) = r_2$$

YLEINEN RATKAISU

$$u(x,y) = f(x + ry) + g(x + r^* y)$$

KOMPLEKSINEN, MUTTA REAALI- JA IMAGINAARIOSAT ERIKSEEN TOTEUTTAVAT YHTÄLÖN

ESIM. LAPLACE $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\boxed{\nabla^2 u = 0 \quad \text{"HARMONISET FUNKTIOT"}}$

$$u(x,y) = f(x + iy) + g(x - iy)$$

$f(z) = e^{iz}$; $g(z) = 0$ ANTAA ESIMERKIKSI

$$f(x+iy) = e^{ix - y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$$

$$u(x,y) = \cos x\, e^{-y}$$
$$= \sin x\, e^{-y}$$

MOLEMMAT HARMONISIA

TAI $f = 0$ JA

$$g(z^*) = g(x - iy) = e^{ix + y} = e^{y}(\cos x + i \sin x)$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \cos x\, e^{y} \\ &= \sin x\, e^{y} \end{aligned}\right\} \text{HARMONISIA}$$

FYMM I : ANALYYTTISEN FUNKTION $f(z)$ REAALI- JA IMAGINAARIOSAT TOTEUTTAVAT 2-UL. LAPLACEN YHTÄLÖN

ALKUEHDOT

HYPERBOLISET
PARABOLISET

OIKEAT ALKUEHDOT JA REUNAEHDOT TEKEVÄT RATKAISUN YKSIKÄSITTEISEKSI

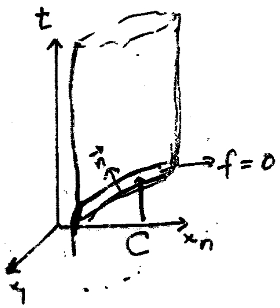
1. HYPERBOLISET YHTÄLÖT

TARK. YHTÄLÖJÄ TYYPPIÄ (SOPIVIEN MUUTTUJIEN VAIHTOJEN JÄLKEEN)

"PAIKKA"

$$u_{tt}(x_1,\dots,x_n;t) = c^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} + \hat{f}(x,t,u,u_{x_i},u_t)$$

"AIKA"



$(x_1,\dots,x_n) \in C$

Mikäli $C \neq R^n$ on annettava reunaehdot C:n reunalla, $t \in (t_0,\infty)$

CAUCHYN ALKUEHDOT:

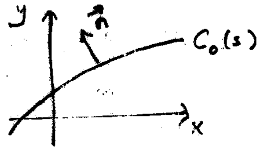
ANNETAAN $u(x_1,\dots,x_n)$ JA SEN NORMAALIDERIVAATTA

$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n}\cdot\nabla u$ PINNALLA $f(x_1,\dots,x_n,t) = 0$

PINTA $f=0$ EI SAA OLLA KARAKTERISTINEN PINTA $\omega = C$

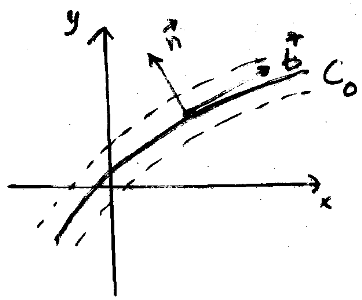
SELITÄMME SYYN TÄHÄN RAJOITUKSEEN TAPAUKSESSA $u = u(x,y)$ $(t \to y)$

"PINTA" OLKOON KÄYRÄ $C_0 = \{x_0(s), y_0(s)\}$,



OLKOON $u(x_0(s), y_0(s)) = u_0(s)$,

JA $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{C_0}$ ANNETTU



HALUAMME MÄÄRITELLÄ $u(x,y)$:n C_0:n LÄHISTÖSSÄ, KÄYTETÄÄN TAYLORIN KEHITELMÄÄ

$$u(x,y) = u(x_0(s),y_0(s)) + u_x\Big|_{C_0}(x-x_0) + u_y\Big|_{C_0}(y-y_0)$$
$$+ \tfrac{1}{2}u_{xx}\Big|_{C_0}(x-x_0(s))^2 + u_{xy}\Big|_{C_0}(x-x_0(s))(y-y_0(s))$$
$$+ \tfrac{1}{2}u_{yy}\Big|_{C_0}(y-y_0(s))^2 + \dots$$

1. TERMI $= u_0(s)$ TUNNETAAN

ENSIMMÄISEN DERIVAATAN TERMIT ?

$$\frac{du}{ds} = \underset{\text{TUNNETTU}}{u_0'(s)} = u_x\Big|_{C_0} \underset{\text{TUNNETTU}}{\frac{dx_0(s)}{ds}} + u_y\Big|_{C_0} \underset{\text{TUNNETTU}}{\frac{dy_0(s)}{ds}}$$

TARVITAAN TOINEN YHTÄLÖ DERIVAATTOJEN $u_x\Big|_{C_0}$, $u_y\Big|_{C_0}$ MÄÄRITTÄMISEKSI

C_0:N TANGENTTIVEKTORI $\vec{t} \propto \left(\frac{dx_0}{ds}, \frac{dy_0}{ds}\right)$

NORMAALIVEKTORI $\vec{n}\cdot\vec{t} = 0$ $\quad \vec{n} \propto \left(\frac{dy_0}{ds}, -\frac{dx_0}{ds}\right)$

ON TIEDETTÄVÄ (CAUCHY)

$$\underset{\text{TUNNETTU}}{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{C_0}} = u_x\Big|_{C_0}\frac{dy_0}{ds} - u_y\Big|_{C_0}\frac{dx_0}{ds}$$

NYT MEILLÄ ON 2 YHTÄLÖÄ, VOIDAAN RATKAISTA

$u_x\Big|_{C_0}$, $u_y\Big|_{C_0}$

TOISEN KERTALUVUN DERIVAATTOJEN MÄÄRITTÄMISEKSI MEILLÄ ON KOLME YHTÄLÖÄ :

$$\frac{du_x}{ds} = u_{xx}\Big|_{C_0} \frac{dx_0}{ds} + u_{xy} \frac{dy_0}{ds}$$

$$\frac{du_y}{ds} = u_{xy}\Big|_{C_0} \frac{dx_0}{ds} + u_{yy} \frac{dy_0}{ds}$$

$$a(C_0)\, u_{xx}\Big|_{C_0} + 2b(C_0)\, u_{xy}\Big|_{C_0} + c(C_0)\, u_{yy}\Big|_{C_0} + F(C_0) = 0$$

$a(C_0) = a(x_0, y_0)$ JNE TUNNETTUJA

$F(C_0) = F(x_0, y_0, u_0, u_x\big|_{C_0}, u_y\big|_{C_0})$ TUNNETTU

YHTÄLÖRYHMÄLLÄ

$$\begin{aligned} a\, u_{xx}\Big|_{C_0} + 2b\, u_{xy}\Big|_{C_0} + c\, u_{yy}\Big|_{C_0} &= -F \\ \frac{dx_0}{ds} u_{xx}\Big|_{C_0} + \frac{dy_0}{ds} u_{xy}\Big|_{C_0} &= \frac{du_x}{ds} \\ \frac{dx_0}{ds} u_{xy}\Big|_{C_0} + \frac{dy_0}{ds} u_{yy}\Big|_{C_0} &= \frac{du_y}{ds} \end{aligned}$$

ON YKSIKÄSITTEINEN RATKAISU , JOS DETERMINANTTI

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \frac{dx_0}{ds} & \frac{dy_0}{ds} & 0 \\ 0 & \frac{dx_0}{ds} & \frac{dy_0}{ds} \end{vmatrix} = a\left(\frac{dy_0}{ds}\right)^2 + c\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - 2b\left(\frac{dx_0}{ds}\right)\left(\frac{dy_0}{ds}\right) \neq 0$$

TÄLLÖIN SAADAAN $u(x,y)$ LASKETTUA $(x-x_0)^2, (y-y_0)^2 \ldots$ TARKKUUDELLA (JA ETEENPÄIN TAYLOR-SARJAN KAIKKI TERMIT)

MUTTA JOS C_0 ON KÄYRÄ

$$a\left(\frac{dy_0}{ds}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy_0}{ds}\right)\left(\frac{dx_0}{ds}\right) + c\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 = 0 \quad \Big|\, \cdot (ds)^2 \cdot \frac{1}{(dx)^2}$$

ELI $y = y(x)$ S.E.

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 \qquad (K')$$

RATKAISU EI ONNISTU !

(K') ON ITSE ASIASSA KARAKTERISEN PINNAN = KARAKTERISTIKAN YHTÄLÖ

$$\omega = \omega(x,y) = 0$$

$$a\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (KAR)$$

$$0 = d\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)dx \Rightarrow dy/dx = -\frac{\partial\omega/\partial x}{\partial\omega/\partial y}$$

JAETAAN (KAR) $(\partial\omega/\partial y)^2$:LLA , KÄYTETÄÄN

NÄHDÄÄN ETTÄ (KAR) $\Leftrightarrow$ (K')

2. PARABOLISET YHTÄLÖT

$$u_t = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + f(x, t, u, u_x)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in C$$

ALKUEHTO $\quad u(x_1, \dots, x_n, t = t_0) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$

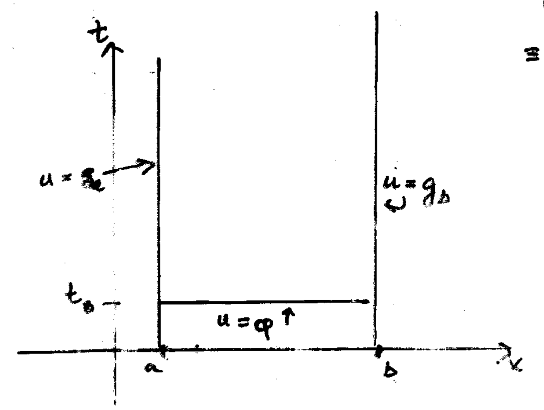
REUNAEHDOT

ESIM $\quad u + \sum_{i=1}^{n} k_i u_{x_i} = g(x_1, \dots, x_n, t) \qquad t_0 < t < \infty$

$(x_1, \dots, x_n) \in \partial C$

$\equiv$ C:N <u>REUNA</u>

ESIM.



$C = (a, b)$

3. ELLIPTISET YHTÄLÖT

$V \subset \mathbb{R}^n$, ∂V REUNA

$\vec{n}$ REUNAN NORMAALI-VEKTORI

ETSITÄÄN ELLIPTISEN YHTÄLÖN RATKAISU V:SSÄ

SOPIVIA REUNAEHTOJA :

DIRICHLET $\quad$ U ANNETTU REUNALLA

$$u(x)\Big|_{\partial V} = a(x) \qquad x \in \partial V \qquad (D)$$

NEUMANN $\quad$ U:N NORMAALIDERIVAATTA ANNETTU REUNALLA

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial V} = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) u \Big|_{\partial V} = b(x) \qquad x \in \partial V \qquad (N)$$

SEKAEHTO (ENGL. MIXED BOUNDARY CONDITION)

OLKOON $\alpha(x) \geq 0$ FUNKTIO ∂V:LLÄ

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x) u(x)\right]_{x \in \partial V} = \underset{\text{ANNETTU}}{c(x)} \qquad (S)$$

$$\int_V d^3x\ \vec\nabla\cdot\vec V = \int_{\partial V} d^2\sigma\ \vec n\cdot\vec V \qquad \vec V = \psi\vec\nabla\psi,\quad \nabla^2\psi = 0$$
$$\vec\nabla\cdot\vec V = (\vec\nabla\psi)^2$$

$$\Rightarrow \int_V d^3x\,(\vec\nabla\psi)^2 = \int_{\partial V} d^2\sigma\ \psi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

EHDOILLA (D) TAI (N) SEURAA SIIS

$$\int_V d^3x\,(\vec\nabla\psi)^2 = 0$$

ELI $\vec\nabla\psi = 0$ V:SSÄ, S.O. $\psi = C = $ VAKIO V:SSÄ

(D) : $C = 0 \Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$
RATKAISU 1-KÄS.

(N) : SALLII $C \neq 0$ $\quad u_1(\vec x) = u_2(\vec x) + C$

NEUMANNIN REUNAEHDOILLA RATKAISU
ON YKSIKÄSITTEINEN VAKIOTA VAILLE

(S) : $\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\alpha\psi$ ∂V:LLÄ

$$\Rightarrow \int_V d^3x\,(\vec\nabla\psi)^2 + \int_{\partial V} d^2\sigma\ \overset{\geq 0}{\alpha(x)}(\psi(x))^2 = 0$$

$\Rightarrow \vec\nabla\psi = 0$ V:SSÄ $\Rightarrow \psi = C =$ VAKIO $\Rightarrow \int_{\partial V} d^2\sigma\ C^2\alpha(x) = 0$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ RATKAISU 1-KÄS.

ESIMERKINOMAISESTI TODISTAMME,
ETTÄ POISSONIN YHTÄLÖN

$$-\nabla^2 u(\vec x) = f(\vec x) \qquad \vec x \in V \qquad (P)$$

RATKAISU ON YKSIKÄSITTEINEN $(n=3)$

OLKOOT u_1, u_2 (P):N RATKAISUJA.

$$\psi(\vec x) \equiv u_1(\vec x) - u_2(\vec x)$$

TOTEUTTAA

$$\nabla^2\psi = 0$$

SEKÄ YHDEN EHDOISTA

$$\psi\Big|_{\partial V} = 0 \qquad (D)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0 \qquad (N)$$
$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial n} + \alpha\psi\right)_{\partial V} = 0 \qquad (S)$$

MAPU: GAUSSIN LAUSE

$$\int_V d^3x\ \vec\nabla\cdot\vec V = \int_{\partial V} d^2\sigma\ \vec n\cdot\vec V$$
($\vec n^2 = 1$ ∂V:n ulosp. suunt. normaali)

KUN $\vec V = \psi\vec\nabla\psi$ TÄMÄ SANOO

$$\vec\nabla\cdot\vec V = \underbrace{\psi\nabla^2\psi}_{=0} + (\vec\nabla\psi)^2 = (\vec\nabla\psi)^2$$

HUOM. NEUMANNIN EHDOSSA

$$\frac{\partial u}{\partial n} = b(\vec{x}) \qquad \vec{x} \in \partial V$$

POISSONIN YHTÄLÖLLE

$$-\nabla^2 u(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

$b(\vec{x})$ EI TÄYSIN MIELIVALTAINEN :

$$\int_V d^3x\, f(\vec{x}) = -\int_V d^3x\, \nabla^2 u = -\int_V d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u$$

$$= -\int_{\partial V} d^2\sigma\, \frac{\partial u}{\partial n} = -\int_{\partial V} d^2\sigma\, b(\vec{x})$$

ON SIIS OLTAVA

$$\int_{\partial V} d^2\sigma\, b(\vec{x}) = -\int_V d^3x\, f(\vec{x}) .$$

MUUTTUJIEN EROTTELU

ESIM. HELMHOLTZ $\quad \nabla^2 u + k^2 u = 0$

YRITE : $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\Rightarrow \quad YZX'' + XZY'' + XYZ'' + k^2 XYZ = 0 \;\Big|\; \frac{1}{XYZ}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + k^2 = 0$$, KIRJ. MUOTOON

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{RIIPPUU VAIN} \\ \text{x:STÄ}}}{\frac{X''}{X}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RIIPPUU y, z:STA}}}{-k^2 - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z}} = \text{vakio} = -\ell^2$$

$$\Rightarrow X'' = -\ell^2 X \qquad X = A_\ell^{(1)} \sin \ell x + A_\ell^{(2)} \cos \ell x$$

$$\frac{Y''}{Y} = \ell^2 - k^2 - \frac{Z''}{Z} = \text{vakio} = -m^2$$

$$Y'' = -m^2 Y \qquad Y = B_m^{(1)} \sin my + B_m^{(2)} \cos my$$

$$Z'' = (-k^2 + \ell^2 + m^2) Z \equiv -n^2 Z$$

$$k^2 = \ell^2 + m^2 + n^2$$

$$Z = C_n^{(1)} \sin(nz) + C_n^{(2)} \cos(nz)$$

SUPERPOSITIOPERIAATE ; YLEINEN RATKAISU

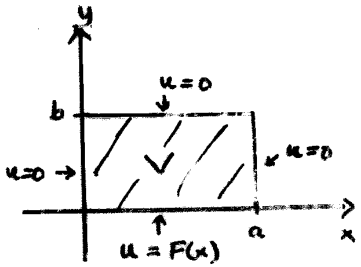
$$u(x,y,z) = \sum_{\substack{l,m,n \\ l^2+m^2+n^2=k^2}} \left(A_l^{(1)} \sin(lx) + A_l^{(2)} \cos(lx) \right)$$
$$\times \left(B_m^{(1)} \sin(my) + B_m^{(2)} \cos(my) \right) \left(C_n^{(1)} \sin(nz) + C_n^{(2)} \cos(nz) \right)$$

KERTOIMET A, B, C MÄÄRÄYTYVÄT REUNAEHDOISTA

MUUTTUJIEN EROTTELU KÄYTTÖKELPOINEN LINEAARISEN, HOMOGEENISEN YHTÄLÖN TAPAUKSESSA (SUPERPOSITIOPERIAATE PÄTEE)

ESIMERKKI : KAKSIUL. LAPLACEN DIRICHLET'N ONGELMA SUORAKAITEESSA (CRONSTRÖMIN KIRJA)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b$$



REUNAEHDOT:

$u(x,0) = F(x)$

$u(x,b) = 0$

$u(0,y) = 0$

$u(a,y) = 0$

$$F(0) = F(a) = 0$$

YRITE: $u(x,y) = A(x)B(y)$

$$\Rightarrow \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} = 0$$

$$\frac{A''}{A} = -k^2, \quad \frac{B''}{B} = k^2$$

$$\Rightarrow A_k(x) = \alpha_k \sin(kx) + \beta_k \cos(kx)$$
$$B_k(y) = \gamma_k \sinh(ky) + \delta_k \cosh(ky)$$

$$u(0,y) = A_k(0) B_k(y) = \beta_k \left(\gamma_k \sinh(ky) + \delta_k \cosh(ky) \right) = 0$$
$$\Rightarrow \beta_k = 0$$

$$u(a,y) = A_k(a) B_k(y) = \alpha_k \sin(ka) \left(\gamma_k \sinh(ky) + \delta_k \cosh(ky) \right) = 0$$

$\Rightarrow$ VAIN SELLAISET k, JOILLE $\sin(ka) = 0$ KELPAAVAT, ELI $k = \frac{n\pi}{a}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow A(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$ TAI NÄIDEN YHDISTELMÄ

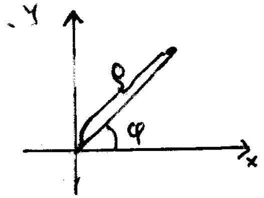
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \left(\gamma_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \delta_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \right)$$

$$u(x,b) = 0 \Rightarrow \gamma_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) + \delta_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_n = -C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \quad \delta_n = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)$$

$$\Rightarrow B_n(y) = C_n \left[-\sinh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cosh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) + \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right) \right]$$
$$= C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right)$$ (MUISTA: $\sinh(u-v) = \sinh u \cosh v - \cosh u \sinh v$)

MUUTTUJIEN EROTTELU TASON POLAARIKOORDINAATEISSA

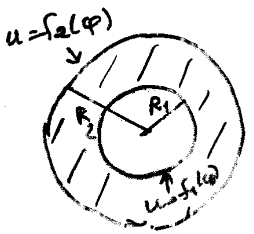


$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

ESIM. LAPLACEN YHTÄLÖ YMPYRÄRENKAASSA; DIRICHLET'N REUNAEHDOT



$$\nabla^2 u(\rho,\varphi) = 0 \qquad R_1 < \rho < R_2$$

$$u(R_1,\varphi) = f_1(\varphi)$$

$$u(R_2,\varphi) = f_2(\varphi)$$

YRITE $u(\rho,\varphi) = P(\rho)\,\Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow \quad \rho^2(P'' + \rho^{-1}P')\Phi + P\Phi'' = 0 \qquad \Big| \frac{1}{P\Phi}$$

$$\frac{1}{P}(\rho^2 P'' + \rho P') = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda^2$$

$$\Phi'' = -\lambda^2\Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi(\varphi) = a\cos(\lambda\varphi) + b\sin(\lambda\varphi)$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \lambda = n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\Phi_n(\varphi) = a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b-y)\right) \qquad (1)$$

TOTEUTTA REUNAEHDOT $u=0$ KOLMELLA SIVULLA

NELJÄS SIVU:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)$$

$$= F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

($F(0) = F(a) = 0 \Rightarrow F$ VOIDAAN KEHITTÄÄ SINI-SARJAKSI)

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{1}{\sinh(\frac{n\pi}{a}b)} F_n$$

$$= \frac{1}{\sinh(\frac{n\pi}{a}b)} \frac{2}{a}\int_0^a dx'\, F(x')\sin\left(\frac{n\pi}{a}x'\right)$$

SIJOITUS SARJAAN (1) ANTAA 1-KÄS. RATKAISUN

$$\Rightarrow \quad \rho^2 P'' + \rho P' - n^2 P = 0$$

RATK.

1°) $n = 0$ $\quad P_0(\rho) = A_0 + B_0 \log \rho$

2°) $n \neq 0$ YRITE $P(\rho) = \rho^k$

$$\Rightarrow k(k-1) + k - n^2 = 0 \quad \Rightarrow k = \pm |n|$$

$$\Rightarrow P_n(\rho) = A_n \rho^{|n|} + B_n \rho^{-|n|}$$

"ALKEISRATKAISUT"

$u_0(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 \log \rho$

$u_n^{(1)}(\rho,\varphi) = (A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\varphi)$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$u_n^{(2)}(\rho,\varphi) = (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\varphi)$ $\quad$ ($n < 0$ ANTAA SAMAT RATKAISUT)

HUOM! YMPYRÄSSÄ $0 \leq \rho < R$ ON HYLÄTTÄVÄ $\log \rho$, ρ^{-n} ($B_0 = B_n = D_n = 0$)

SUPERPOSITIOPERIAATE: YLEINEN RATK.:

$$u(\rho,\varphi) = A_0 + B_0 \log \rho + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos(n\varphi) + (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin(n\varphi) \Big]$$

KEHITETÄÄN $\quad i = 1, 2$

$$f_i(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n^{(i)} \cos(n\varphi) + b_n^{(i)} \sin(n\varphi) \right)$$

$\left(a_0^{(i)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_i(\varphi);\quad a_n^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_i(\varphi) \cos(n\varphi),\quad b_n^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, f_i(\varphi) \sin(n\varphi) \quad n = 1, 2, \ldots \right)$

SIJ $\rho = R_1$, $\rho = R_2$ YL. RATKAISUUN JA VERRATAAN SAMAN KULMARIIPPUVUUDEN KERTOIMIA

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A_0 + B_0 \log R_1 &= a_0^{(1)} \\ A_0 + B_0 \log R_2 &= a_0^{(2)} \end{aligned}\right\} \text{RATK. } A_0, B_0$$

$$\left.\begin{aligned} A_n R_1^n + B_n R_1^{-n} &= a_n^{(1)} \\ A_n R_2^n + B_n R_2^{-n} &= a_n^{(2)} \end{aligned}\right\} \text{RATK. } A_n, B_n$$

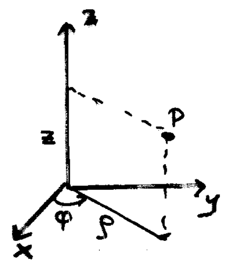
$$\left.\begin{aligned} C_n R_1^n + D_n R_1^{-n} &= b_n^{(1)} \\ C_n R_2^n + D_n R_2^{-n} &= b_n^{(2)} \end{aligned}\right\} \text{RATK. } C_n, D_n$$

ESIM. $f_1(\varphi) = \cos 2\varphi$, $f_2(\varphi) = \sin \varphi$

ANTAA

$$u(\rho,\varphi) = \frac{R_1 R_2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\frac{\rho}{R_1} - \frac{R_1}{\rho} \right) \sin \varphi + \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^4 - R_1^4} \left(\frac{R_2^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_2^2} \right) \cos 2\varphi$$

MUUTTUJIEN ERITTELU SYLINTERIKOORDINAATEISSA



$x = \rho \cos\varphi$
$y = \rho \sin\varphi$
z

NAPU: $\nabla^2 = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)}_{=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

HALUAMME EROTELLA MUUTTUJAT ("SEPAROIDA") YHTÄLÖSSÄ $(\nabla^2 + k^2)u = 0$

YRITE: $u(\rho, \varphi, z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$

$$(\nabla^2+k^2)u = \Phi Z\left(P'' + \frac{1}{\rho}P'\right) + \frac{1}{\rho^2}PZ\Phi'' + P\Phi Z'' + k^2 P\Phi Z = 0 \quad \Big| \frac{1}{P\Phi Z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P}\left(P''+\frac{1}{\rho}P'\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\Phi'' + k^2 = -\frac{Z''}{Z} = -\ell^2 \quad \text{VAKIO}$$

$$\Rightarrow Z_\ell'' = \ell^2 Z_\ell \qquad Z_\ell(z) = C_1 e^{\ell z} + C_2 e^{-\ell z}$$

$$\frac{1}{P}\left(P''+\frac{1}{\rho}P'\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\Phi'' + k^2 + \ell^2 = 0 \quad \Big|\, \rho^2$$

$$\frac{1}{P}\left(\rho^2 P'' + \rho P'\right) + (k^2+\ell^2)\rho^2 = -\frac{1}{\Phi}\Phi'' = m^2 \quad \text{VAKIO}$$

$$\Phi'' = -m^2\Phi \qquad \Phi_m = B_m^{(1)}\sin m\varphi + B_m^{(2)}\cos m\varphi$$
$$\text{TAI} \quad = B_m e^{im\varphi},$$

$$\Phi_m(\varphi+2\pi) = \Phi_m(\varphi) \quad \Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

MERKITÄÄN $n^2 \equiv k^2 + \ell^2$

$$\rho^2 P'' + \rho P' + (n^2\rho^2 - m^2)P = 0$$

ELI

$$P'' + \frac{1}{\rho}P' + \left(n^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)P = 0$$

"BESSELIN YHTÄLÖ"

HUOM. LASKU PÄTEE MYÖS JOS k^2 RIIPPUU ρ:STA $k^2 = k^2(\rho)$

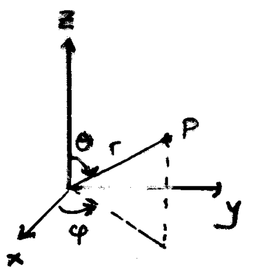
$$\Rightarrow n^2(\rho) = k^2(\rho) + \ell^2.$$

(EIKÄ YHTÄLÖ

$$P'' + \frac{1}{\rho}P' + \left(\ell^2 + k^2(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2}\right)P = 0$$

ENÄÄ OLE BESSELIN YHTÄLÖ)

PALLOKOORDINAATEISSA



$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$0 \le \theta \le \pi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

YRITE : $u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$

$$(\nabla^2+k^2)u = Y\left(R'' + \frac{2}{r}R'\right) + \frac{R}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right) + k^2 RY = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{RY}$$

$$\frac{r^2}{R}\left(R'' + \frac{2}{r}R'\right) + k^2r^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}\right)$$

$= \text{vakio} = \ell(\ell+1)$ (TÄMÄ MUOTO OSOITTAUTUU TARKOITUKSENMUKAISEKSI)

"RADIAALINEN YHTÄLÖ"

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R + k^2R = 0$$

KAKSI RIIPPUMATONTA RATK. $R_\ell(r) = A\,R_\ell^{(1)}(r) + B\,R_\ell^{(2)}(r)$

ESIM. $k^2 = 0$ (LAPLACE)

$$R_\ell'' + \frac{2}{r}R_\ell' - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R_\ell = 0$$

YRITE $R_\ell = A\,r^p$ (POTENSSI)

$$p(p-1) + 2p - \ell(\ell+1) = 0 \Leftrightarrow p(p+1) = \ell(\ell+1)$$

RATKAISUT $p = \ell, \quad p = -\ell-1$

$$R_\ell(r) = A_\ell r^\ell + B_\ell r^{-\ell-1}$$

HUOM. TAAS JOHTOMME TOIMII KUN $k^2 = k^2(r)$

RADIAALINEN YHTÄLÖ ON TÄLLÖIN

$$R_\ell'' + \frac{2}{r}R_\ell' + \left(k^2(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R_\ell = 0$$

KULMISTA RIIPPUVA YHTÄLÖ :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \ell(\ell+1)Y = 0$$

RATKAISUT "PALLOHARMONISET FUNKTIOT"

SEPAROIDAAN EDELLEEN

$$Y(\theta,\varphi) = P(\theta)\,Q(\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{P}{\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + \ell(\ell+1)PQ = 0 \quad \Big| \frac{\sin^2\theta}{PQ}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \ell(\ell+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = m^2 \quad \text{vakio}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 Q \quad \Rightarrow Q_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}$$

$$Q_m(\varphi + 2\pi) = Q_m(\varphi) \quad \Rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

EPÄHOMOGEENISET YHTÄLÖT

$$Lu = f \qquad (1)$$

L: LINEAARINEN OPERAATTORI, ESIM $L = -\nabla^2 + k^2$

LAUSE JOS u_1, U_2 OVAT YHTÄLÖN (1) RATKAISUJA, EROTUS $u_1 - u_2$ TOTEUTTAA HOMOGEENISEN YHTÄLÖN $Lu = 0$

TOD. : $L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = f - f = 0$

SEURAUS EPÄHOMOGEENISEN YHTÄLÖN (1) YLEINEN RATKAISU ON

$$u = u_{yl}^{(0)} + u_e ,$$

MISSÄ $u_{yl}^{(0)}$ ON HOMOGEENISEN YHTÄLÖN $Lu_{yl}^{(0)} = 0$ YLEINEN RATKAISU, JA u_e MIKÄ TAHANSA YHTÄLÖN $Lu = f$ RATKAISU ($\neq 0$) ("ERIKOISRATKAISU")

TOD. u_1 YHTÄLÖN (1) RATKAISU
$\Rightarrow L(u_1 - u_e) = 0 \Rightarrow u_1 = u_e +$ HOMOG. YHT. RATK.

ON SIIS HUOMATTAVA, ETTÄ JOS HOMOG. YHTÄLÖLLÄ $Lu = 0$ ON NOLLASTA EROAVIA RATKAISUJA, YHTÄLÖN $Lu = f$ RATKAISU EI OLE 1-KÄS. (1-KÄS. ESIM. REUNAEHTOJEN AVULLA)

TOINEN YHTÄLÖ : (JAETAAN $\sin^2\theta$:LLA)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P = 0$$

OTETAAN MUUTTUJAKSI $\xi = \cos\theta \qquad -1 \le \xi \le 1$

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d\xi}{d\theta}\frac{d}{d\xi} = -\sin\theta\frac{d}{d\xi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\theta}\left(-\sin\theta\frac{d}{d\xi}\right)\left(-\sin^2\theta\frac{dP}{d\xi}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0$$

ELI

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dP}{d\xi}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right]P = 0$$

RATKAISUT "LEGENDREN LIITTOFUNKTIOT"
$P_l^m(\xi)$

SIIS

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l,m}\left(A_{lm}R_l^{(1)}(r) + B_{lm}R_l^{(2)}(r)\right)P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}$$

HUOM RADIAALISET FUNKTIOT $R_l^{(1)}$, $R_l^{(2)}$ EIVÄT RIIPU SEPAROIMISVAKIOSTA m

---

$\mathbb{R}^3$:SSA ∇^2 SEPAROITUU YHDESSÄTOISTA KOORDINAATISTOSSA

LUETTELO : ESIM. CRONSTRÖM S. 47-49