

PALLOHARMONISET FUNKTIOT

PALATAAN 3-DL. YHTÄLÖN $(\nabla^2 + f(r))u = 0$
 SEPAROINTIIN PALLOKOORDINAATTEISSA:
 YRITTE $u(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi)$

\Rightarrow RADIAALINGEN YHTÄLÖ
 $R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{K}{r^2} R + f(r) R = 0$
 KULMAHYNTÄLÖ $K = \text{SEPAROIMISVAKIO}$

$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + K Y = 0$
 EDELLEEN $Y(\theta, \varphi) = P(\theta) Q(\varphi)$

$\Rightarrow \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -m^2 Q \quad Q_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}$
 1-KÄS. $Q_m(\varphi + 2\pi) = Q_m(\varphi)$
 $\Rightarrow m$ kokonaisluku

SEKÄ $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{dP}{d\theta}) + [K - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}] P = 0$
 MUUTTUVAAN VAIHTO $x = \cos \theta$
 SAATA $\frac{d}{dx} [(1-x^2) \frac{dP}{dx}] + [K - \frac{m^2}{1-x^2}] P = 0 \quad (1)$

JOS $K = l(l+1)$, MISSÄ $l = 0, 1, 2, \dots$
 (1) ON LEGENDREN LIITTOYHTÄLÖ, JA KOKO VÄLILLÄ $-1 \leq x \leq 1$ ÄÄRELLINEN RATKAISU ON $P_l(x) = P_l^m(x)$

SIJOITETAAN a_n :N LAUSEKE $f(x)$:N KEHITELMÄÄN (K)

$\Rightarrow f(x) = \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{\frac{m}{2}} f(y) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2^{n+1} (n-m)!}{2 (n+m)!} P_n^m(y) P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$

$\Rightarrow \left(\frac{1-y^2}{1-x^2} \right)^{\frac{m}{2}} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2^{n+1} (n-m)!}{2 (n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(y) = \delta(x-y)$

$\Rightarrow \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2^{n+1} (n-m)!}{2 (n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(y) = \delta(x-y)$

(TÄSSÄ KÄYTIMME $f(x,y) \delta(x-y) = f(x,x) \delta(x-y)$)

KAAVASSA OLETETAAN, ETTÄ $-1 \leq x \leq 1$ JA $-1 \leq y \leq 1$.

OSOITAMME NYT, ETTÄ $K \neq l(l+1)$ AUTAA VAIN KELPAMATTOMIA RATKAISUJA: $P(1) = \infty$ JA/TAI $P(-1) = -\infty$

KIRJOITETAAN (1) MUOTOON

$$\frac{d^2 P}{dx^2} - \frac{2x}{(1+x)(1-x)} \frac{dP}{dx} + \left[\frac{K}{(1+x)(1-x)} - \frac{m^2}{(1-x)^2(1+x)^2} \right] P = 0$$

JOSTA NÄHDÄÄN, ETTÄ $x=1$ JA $x=-1$ OVAT YHTÄLÖN HEIKKOJA ERIKOISPISTEITÄ. KÄYTTÄYTYMINEN $x=1$:SSÄ SAADAN SARJA.

YRITETTÄ $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-x)^{n+p}$

⇒ KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ

$$P(p-1) + p - \frac{m^2}{4} = p^2 - \frac{m^2}{4} = 0$$

⇒ $p = \pm \frac{|m|}{2}$ JATKOSSA KÄSITTELEMME TAPAUSTA $m > 0$

SAMANTAPAINEN TARKASTELU $x = -1$:SSÄ

AUTAA $P(x) \propto (1+x)^{\pm \frac{m}{2}}$

HALUTTU KÄYTTÄYTYMINEN PÄÄTEPISTEISSÄ

ON $P(x) \propto (1+x)^{\frac{m}{2}} (1-x)^{\frac{m}{2}} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ ($m > 0$)

TÄSTÄ MOTIVOITUNEINA KIRJOITAMME

$$P(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} Y_m(x) \quad (Y_m(x): N \text{ KÄYTTÄMÄ!})$$

JÄ JONKAMME $U_m(x)$:N TOTEUTTAMAN YHTÄLÖN

$$(1-x^2) U_m'' - 2(m+1)x U_m' + [K - m(m+1)] U_m = 0$$

DERIVOIDAAN ↑ ⇒

$$(1-x^2)(U_m')' - 2(m+2)x(U_m')' + [K - m(m+1)(m+2)] U_m' = 0$$

U_m' TOTEUTTAAN SIIS U_{m+1} :N YHTÄLÖN

$$U_{m+1} = C \cdot U_m'$$

↑ VÄLIKIO, VOIMME OTTAA C=1

TÄMÄ TARKOITTAAN:

$$U_m(x) = \frac{d^m U_0(x)}{dx^m}$$

MISSÄ $U_0(x)$ TOTEUTTAAN

$$(1-x^2) U_0'' - 2x U_0' + K U_0 = 0$$

RATKAISEMME SARJAMENETELMÄLLÄ PÄÄNN. PISTEEN $x=0$ YMPÄRILLÄ

KARAKT. YHT. $P(p-1) = 0$ $p=0$ TAI $p=1$

$$U_0^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)} x^{n+p}$$

KERTOIMET a_n TOTEUTTAVAT (SEKÄ $p=0$ ETTÄ $p=1$)

$$\sum_n [(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n+1)a_n + K a_n] x^n = 0$$

ELI $a_{n+2} = \frac{n(n+1) - K}{(n+1)(n+2)} a_n$

$a_0 \neq 0$ $a_1 = 0$ ⇒ PARILL. RATHAISU $p=0$
 $a_0 = 0$ $a_1 \neq 0$ ⇒ PARITON $p=1$.

PALLOHARMONISET FUNKTIOT

MÄÄR.: $Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$

↑ CONDON-SHORTLEY VAHESOPIMUS

$Y_{lm} \approx Y_l^m(\theta, \varphi)$

TOTEUTTAVAT: $\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{1}{r^2} \Delta^2$

↑ HÄRJ.

* $\left[-\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$= -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm}(\theta, \varphi) = m Y_{lm}(\theta, \varphi)$

INTEGRAALI YLI AVARUUSKULMAN $\int_0^{2\pi}$

* $\int_{\Omega} Y_{l_1 m_1}^* (\theta, \varphi) Y_{l_2 m_2} (\theta, \varphi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi Y_{l_1 m_1}^* Y_{l_2 m_2}$

$= \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$ (ORTONORMIITUS)

TÄYDELLISYYS:

FOURIER'IN SARJON TEORIA \Rightarrow

$f(\varphi)$ JAKSOLLINEN, JAKSO 2π $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$

$\Rightarrow f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\varphi}$

$f_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-im\varphi} f(\varphi)$

$\Rightarrow f(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' f(\varphi') \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}$

SUURILLA n

$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-K}{(n+1)(n+2)} a_n \approx \frac{n - \frac{K}{n+1}}{n+2} a_n \approx \frac{n}{n+2} a_n$

S.O. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

JA $v_0(x) \sim \sum \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$

$\Rightarrow v_m = \frac{d^m v_0}{dx^m} \propto \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad x \rightarrow 1$

JA $P_m(x) \sim (1-x)^{m/2} v_m \propto (1-x)^{-m/2} \quad x \rightarrow 1$

VÄÄRÄ KÄYTTÄYTYMINEN!

ELLEI $K = n(n+1)$ JOLLEKIN $n \in \mathbb{N}$

JOLLOIN SARJA KATKEAA JA $v_0(x)$ ON

POLYNOMI ASTETTA n (LEGENDREN

POLYNOMI!)

AINOASTAAN $K = n(n+1)$ ANTAA

HYVÄKSYTTÄVIÄ RATKAISUJA

$\delta_3(\vec{r}-\vec{r}')$ PALLOKOORDINAATEISSA

$$f(\vec{r}) = \int d^3r' \delta_3(\vec{r}-\vec{r}') f(\vec{r}') =$$

$$= \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \delta_3(\vec{r}-\vec{r}') f(r', \theta', \varphi')$$

$$\Rightarrow \delta_3(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r-r') \frac{1}{\sin\theta} \delta(\theta-\theta') \delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{r^2} \delta(r-r') \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{r^2} \delta(r-r') \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=0}^{l-1} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

LAPLACEN OPERAATTORIN GREENIN FUNKTIO PALLOKOORDINAATEISSA

$$\nabla^2 G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \delta_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

TIEDÄMME JO: $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$

ON ÄÄRETTÖMYDESSÄ HÄVIÄVÄ ∇^2 :N GREENIN FUNKTIO

JORDANIN NYT TOISEN LAUSEKKEEN TÄLLE GREENIN FUNKTIOLE

YRITE: $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{l,m} g_l(r_1, r_2) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$

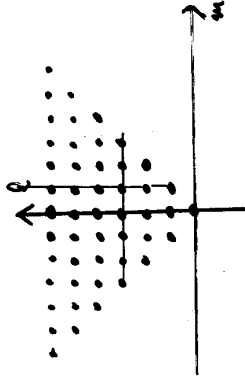
lasku jatkuu s. 132

$$\Rightarrow \delta(\varphi-\varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^\infty e^{im(\varphi-\varphi')}$$

MEILLÄ OLI MYÖS TULOS

$$\sum_{l=1}^\infty \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) P_l^m(y) = \delta(x-y)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^\infty \sum_{l=|m|}^\infty \frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta') e^{im(\varphi-\varphi')}$$



$$= \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi')$$

$$= \delta(\cos\theta - \cos\theta') \delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \delta(\theta-\theta') \delta(\varphi-\varphi') = \frac{1}{\sin\theta'} \delta(\theta-\theta') \delta(\varphi-\varphi')$$

$$\Rightarrow \psi(\theta, \varphi) = \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \delta(\theta-\theta') \delta(\varphi-\varphi') \psi(\theta', \varphi')$$

$$= \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sin\theta'} \delta(\theta-\theta') \delta(\varphi-\varphi') \psi(\theta', \varphi')$$

$$= \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \psi(\theta', \varphi')$$

PALLOHARMONINEN KEHITELMÄ

$$= \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$a_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \psi(\theta, \varphi)$$

INTERMEZZO:
OPERAATTORIN

$$\mathcal{L}_x = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

← EI KOVIN ERIKOINEN MUOTO; VRT. HARV. 6.4

GREENIN FUNKTIO $G(x, y) : x, y \in (a, b)$

$$(1) \mathcal{L}_x G(x, y) = p(x) \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} + p'(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} + q(x) G(x, y) = \delta(x-y)$$

OLETTAAN DATUKUIN, FUNKTIOINSSI

REUNAEDOT

$$A_1 G(a, y) + A_2 \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=a} = 0$$

$$B_1 G(b, y) + B_2 \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0$$

ANTAA SIIIS EPÄHOMOGEENISEN YHTÄLÖN

$$\mathcal{L}_x u = f(x), \quad a < x < b$$

REUNAEDOT $A_1 u(a) + A_2 u'(a) = 0$

$B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0$

RATKAISUN MUODOSSA

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

YHTÄLÖSSÄ (1) PIDETÄÄN $y \in (a, b)$ KIINTEÄNÄ JA

INTEGROIDAAN (1) KUN YLI $y - \epsilon$:STA $y + \epsilon$:IIN:

129

$$\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} dx \left[p(x) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + p'(x) \frac{\partial G}{\partial x} + q(x) G \right] \stackrel{p, p', q \text{ DATUKUINIA } \epsilon \rightarrow 0}{\approx}$$

$$\approx p(y) (\partial_x G(y+\epsilon, y) - \partial_x G(y-\epsilon, y))$$

$$+ p'(y) (G(y+\epsilon, y) - G(y-\epsilon, y)) + q(y) \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} dx G(x, y)$$

$$\stackrel{p.o.}{=} \int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \partial_x \delta(x-y) dx = 1$$

YHTÄLÖ TOTEUTUU, JOS

$$1^\circ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(y+\epsilon, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(y-\epsilon, y) \text{ ELI } G \text{ JATKUVAA}$$

$x=y$: SSÄ

$$2^\circ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\partial_x G(y+\epsilon, y) - \partial_x G(y-\epsilon, y) \right] = \frac{1}{p(y)}$$

ELI $\frac{\partial G}{\partial x}$ EPÄJATKUVAA $x=y$:SSÄ; HYPPÄYS = $\frac{1}{p(y)}$

KUN $x < y$ $G(x, y)$ TOTEUTTAA $\mathcal{L}_x G(x, y) = 0$
ALKUEHDOLLA

$$A_1 G(a, y) + A_2 \partial_x G(a, y) = 0$$

SIIS:

$$G_1(x, y) = \frac{u_1(x) u_2(y)}{p(y) W[u_1, u_2](y)} = G(x, y) \quad x < y$$

$$G_2(x, y) = \frac{u_1(y) u_2(x)}{p(y) W[u_1, u_2](y)} = G(x, y) \quad x > y$$

HUOM. "LEGENDREN IDENTITEETTI"

$$u_1 \lambda_x u_2 - u_2 \lambda_x u_1 = \frac{d}{dx} [p(x) (u_1 u_2' - u_2 u_1')] \\ = \frac{d}{dx} [p(x) W[u_1, u_2](x)]$$

NYT $\lambda_x u_1 = \lambda_x u_2 = 0$, JOTEN

$$\frac{d}{dx} [p(x) W[u_1, u_2](x)] = 0$$

JOTEN $p(x) W[u_1, u_2](x)$ OUVAKIO, EI RIIPUVASTÄ G_1 IN JA G_2 IN LAUSEKKEISSA NIMITTÄJÄ OUVAKIO, EIKÄ RIIPUVASTÄ.

(VAIN YKSI EHTO!)

OLKODN RATKAISU $G_1 = C_1(y) u_1(x)$ $x > y$ G TOTEUTTAAN TAAS $\lambda_x G = 0$ MUTTA EHTO ON

$$B_1 G(b, y) + B_2 \partial_x G(b, y) = 0$$

$$\text{RATKAISU: } G = G_2 = C_2(y) u_2(x)$$

$$G_1(y, y) = G_2(y, y) \Rightarrow C_1(y) u_1(y) = C_2(y) u_2(y)$$

$$\partial_x G_2(y, y) - \partial_x G_1(y, y) = [C_2 u_2' - C_1 u_1'] = \frac{1}{p(y)}$$

KERTOIMILLE C_1, C_2 SAADAN SIIS YHTÄLÖRYHMÄ

$$u_1(y) C_1(y) - u_2(y) C_2(y) = 0 \\ -u_1'(y) C_1(y) + u_2'(y) C_2(y) = \frac{1}{p(y)}$$

RATKAISU C_1, C_2 1-KÄS. JOS

$$u_1(y) u_2'(y) - u_2(y) u_1'(y) = W[u_1, u_2](y) \neq 0$$

ELI u_1, u_2 LIN. RIIPUMATTOMAT

JOS NÄIN ON, RATKAISU ON

$$C_1(y) = \frac{u_2(y)}{p(y) W[u_1, u_2](y)}$$

$$C_2(y) = \frac{u_1(y)}{p(y) W[u_1, u_2](y)}$$

$$\nabla_1^2 G(r_1, r_2) = \sum_{l,m} \left(\frac{1}{r_1^2} \frac{d}{dr_1} \left(r_1^{-2} \frac{d g_l(r_1, r_2)}{dr_1} \right) \right) Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2) + \sum_{l,m} g_l(r_1, r_2) \left(\frac{1}{r_1^2} \nabla_1^2 Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) \right) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$$

$$= \sum_{l,m} \left[\frac{1}{r_1^2} \left(r_1^2 \frac{d^2 g_l}{dr_1^2} + 2r_1 \frac{dg_l}{dr_1} - l(l+1) g_l \right) \right] Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$$

$$= \delta_g(r_1 - r_2) = \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$$

$$\Rightarrow \left(r_1^2 \frac{d^2}{dr_1^2} + 2r_1 \frac{d}{dr_1} \right) g_l(r_1, r_2) - l(l+1) g_l(r_1, r_2) = \delta(r_1 - r_2)$$

$$\text{REUNAENDOT } |g_l(0, r_2)| < \infty$$

$$g_l(\infty, r_2) = 0$$

TÄMÄN YKSIULOITTEISEN ONGELMAN RATKAISU
LÖYTYY EDELLISILLÄ KALVOILLA ESITETTYÄ MENETEL-
MÄÄ KÄYTTÄEN:

HOMOGENEINEN YHTÄLÖ

$$r_1^2 \frac{d^2 g_l}{dr_1^2} + 2r_1 \frac{dg_l}{dr_1} - l(l+1) g_l = 0$$

Yleinen ratkaisu: $g_l = A(r_2) r_1^l + B(r_2) r_1^{-l-1}$

REUNAENDOT \Rightarrow

$$g_l(r_1, r_2) = A(r_2) r_1^l \quad r_1 < r_2$$

$$= B(r_2) r_1^{-l-1} \quad r_1 > r_2$$

ENDOT: 1° $g_l(r_1, r_2)$ JATKUVA P. $r_1 = r_2$

$$2^\circ \frac{dg_l(r_1, r_2)}{dr_1} - l g_l(r_1, r_2) = \frac{1}{r_2^2}$$

$$1^\circ \Rightarrow A(r_2) r_2^l = B(r_2) r_2^{-l-1}$$

$$\Rightarrow B(r_2) = A(r_2) r_2^{2l+1}$$

$$2^\circ -(l+1) B(r_2) r_2^{-l-2} - l A(r_2) r_2^{l-1} = \frac{1}{r_2^2}$$

$$\Rightarrow (2l+1) A(r_2) r_2^{l+1} = -1$$

$$\Rightarrow A(r_2) = -\frac{1}{2l+1} r_2^{-l-1}$$

$$B(r_2) = -\frac{1}{2l+1} r_2^l$$

$$\Rightarrow g_l(r_1, r_2) = -\frac{1}{2l+1} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}}$$

$$r_2 = \min(r_1, r_2)$$

$$r_2 = \max(r_1, r_2)$$

$$\Rightarrow G(r_1, r_2) = -\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|r_1 - r_2|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|r_1 - r_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}} Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$$

(A)

KÄYTTÖ SÄHKÖSTATIIKASSA:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(z')}{|z-z'|} d\Omega'$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int_{\Omega} \rho(z') Y_{lm}^*(\theta', \varphi') d\Omega'$$

$r_2 > r_1$
 $r_2 > r_1$

MULTIPOOLI KEHITELMÄ

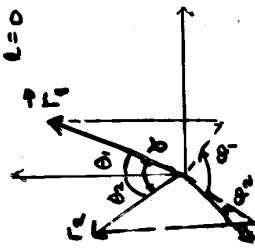
DOVELLAKKE KAAVAA TOISIN:

LEGENDREN POLYNOMIEN GENEROIVA

FUNKTIO:

$$\frac{1}{|r_1 - r_2|} = \frac{1}{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \gamma + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$



VERTAAMALLA KAAVAN (2)

SAADAN

$$P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=0}^l Y_{lm}(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}^*(\theta_2, \varphi_2)$$

"YHTEENLASKULAUSE"

BESSELIN FUNKTIOT

WILHELM BESSEL 1784 - 1846

BESSELIN YHTÄLÖ:

$$f''(z) + \frac{1}{z} f'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) f = 0$$

OTAMME $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$

SARJAYRITE $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{k+\nu}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ [(k+\nu)^2 - \nu^2] f_k + f_{k-2} \right\} z^{k+\nu} = 0$$

($f_{-1} = f_{-2} = 0$)

$k=0 \Rightarrow$ KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ

$$r^2 - \nu^2 = 0$$

RETR.

$$r_1 = \nu \quad r_2 = -\nu$$

ANTAA AINA RATKAISUN

$$f_k = - \frac{f_{k-2}}{k(k+2\nu)} \quad k=1, 2, \dots$$

$f_{-1} \neq 0 \Rightarrow f_{2n+1} = 0 \quad n=1, 2, \dots$ (PARITTOMAT)

MERKITÄÄN $b_k = f_{2k} \quad k=0, 1, 2, \dots$

$$b_k = - \frac{b_{k-1}}{2^2 k(k+\nu)}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \frac{1}{k!(\nu+1)_k} b_0 = \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} b_0$$

$$\Rightarrow f(z) = f_0 z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

SARJA SUPPENEK KAIKILLA Z
KUN VALITTAAN $f_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$ SAADAAN

1. LAJIN BESSELIN FUNKTIO

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(v+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}$$

JOS $s = \nu_1 - \nu_2 = 2\nu \neq$ KOKONAISSLUKU ON $J_{-\nu}(z)$
TÄSTÄ RIIPPUMATON TOINEN RATKAISU :

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

OSOITTAAKSEMME TÄMÄN, LASKEMME WROUNKIN DETERMINANTIN

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = J_\nu(z) J'_{-\nu}(z) - J'_{\nu}(z) J_{-\nu}(z) = W_0 e^{-\int_0^z \frac{2}{z} dz} = \frac{C}{z}$$

YKILÖN C ARVO VOIDAAN LASKEA PIENILLÄ |z|, JOLLOIN

$$\begin{aligned} J_{\pm\nu}(z) &= \frac{1}{\Gamma(\pm\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu} (1 + O(z^2)) \\ \Rightarrow J'_{\pm\nu}(z) &= \frac{1}{2\Gamma(\pm\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu-1} (1 + O(z^2)) \\ \Rightarrow W(J_\nu, J_\nu) &= \frac{1}{z} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu)} \right) + \dots \\ &= -\frac{2 \sin(\pi\nu)}{\pi z} + \dots \Rightarrow C = -\frac{2 \sin(\pi\nu)}{\pi} \neq 0 \\ \uparrow \\ \Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) &= \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)} \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

HUOMI JOS $\nu = l + \frac{1}{2}$, $l = 0, 1, 2, \dots$ ON
 $s = 2\nu = 2l+1$ KOKONAISSLUKU, MUTTA EDELLEEN

$W(J_{l+\frac{1}{2}}, J_{-l-\frac{1}{2}}) \neq 0$
ELI TÄLLÖINKIN $J_{l+\frac{1}{2}}(z)$ JA $J_{-l-\frac{1}{2}}(z)$ OVAT
BESSELIN YHTÄLÖN LIN. RIIPPUMATTOMIA RATKAISUJA.

ENTÄ KUN $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$?

$$\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$$

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

NYT

$$J_{-n}(z) = \lim_{\nu \rightarrow -n} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}$$

$$\Gamma(-n) = \infty \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0 \quad k=0, 1, \dots, n-1$$

SUMMA ALKAA SIIS VASTA TERMIILLÄ $k=n$
UUSI SUMMAUSINDEKSI $m = k-n$

$$\Gamma(k-n+1) = \Gamma(m+1) = m!$$

$$\Rightarrow J_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} = (-1)^n J_n(z)$$

EI ANNA UUTTA RATKAISUA

NEUMANNIN } FUNKTIOT WEBERIN }

ELI 2. LAJIN BESSELIN FUNKTIOT

(KARL NEUMANN 1832-1925; HEINRICH WEBER 1842-1913)

$$Y_\nu(z) \equiv \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \equiv N_\nu(z)$$

ON BESSELIN YHTÄLÖN RATKAISU KUN $\nu \neq n$

$$\nu \rightarrow n \quad \cos(n\pi) J_n(z) - J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) - (-1)^n J_n(z) = 0$$

$$\sin(n\pi) = 0$$

RAJA-ARVO KUN $\nu \rightarrow n$ SAADAAN L'HOSPITALIN SÄÄNNÖN

AVULLA:

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) = \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} [\cos(\nu\pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)]}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin(\nu\pi)} \Bigg|_{\nu=n}$$

$$= \frac{1}{\pi \cos(n\pi)} \left(-\pi \sin(n\pi) J_n(z) + (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right) \Bigg|_{\nu=n}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n}$$

$Y_n(z)$ TOTEUTAA BESSELIN YHTÄLÖN:

DERIVOIDAAN

$$\frac{d^2 J_{\pm \nu}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d J_{\pm \nu}}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_{\pm \nu} = 0$$

$\nu = n$ SUHTEEN \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} J_{\pm \nu} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_{\pm \nu} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_{\pm \nu} = 2\nu J_{\pm \nu}$$

KERROTAAN $\frac{\partial}{\partial \nu} J_{\pm \nu}$ IN TOTEUTTAMA YHTÄLÖ $(-1)^\nu$ LLÄ JA LASKETAAN YHTÄLÖIDEN EROTUS

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right) = 2\nu \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right)$$

ANNETAAN $\nu \rightarrow n$ JA MUISTETAAN $(-1)^n J_{-n} = J_n$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right) \Bigg|_{\nu=n} = 0$$

$$\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n \right) \approx 0.5772 \dots$$

OMINAISUUKSIA:

$$x \rightarrow 0 \quad Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} (\log x + \gamma - \log 2) + O(x^2)$$

$$Y_n(x) \approx \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n + \dots$$

HANKELIN FUNKTIOT

ELI 3. LAJIN BESSELIN FUNKTIOT

(HERMANN HANKEL 1839-1873)

$$H_\nu^{(1)}(z) \equiv J_\nu(z) + i Y_\nu(z)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \equiv J_\nu(z) - i Y_\nu(z)$$

BESSEL, WEBER, NEUMANN, HANKEL: SYLINDERIFUNKTIOT