HILBERT AVARUUDET

KERTAUSTA:

V $\mathbb{C}$-KERTOIMINEN VEKTORIAVARUUS

- NORMI: $u \in V$ $\|u\| \in \mathbb{R}$
  - (N1) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$
  - (N2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$, $\alpha \in \mathbb{C}$
  - (N3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- (VAHVA) SUPPENEMINEN: $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \Leftrightarrow \|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- CAUCHYN JONO: $\|u_n - u_m\| \to 0$ $\quad n, m \to \infty$
- BANACH AVARUUS: JOKAINEN CAUCHYN JONO SUPPENEE KOHTI AVARUUDEN VEKTORIA (AVARUUS TÄYDELLINEN)

JATKUVAT FUNKTIOT

FUNKTIO $f: V \to \mathbb{C}$ ON JATKUVA JOS

$u_n \to u \Rightarrow f(u_n) \to f(u)$,

TAI: JOKAISELLE $\varepsilon > 0$ LÖYTYY $\delta > 0$ S.E.

$\|u - v\| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon$

DUAALIAVARUUS

BANACH AVARUUDEN V LINEAARINEN FUNKTIO(NAALI) ON JATKUVA, LINEAARINEN KUVAUS $\varphi: V \to \mathbb{C}$

$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v)$

LINEAARISET FUNKTIO(NAALI)T MUODOSTAVAT MYÖS $\mathbb{C}$-KERTOIMISEN VEKTORIAVARUUDEN, V:N DUAALIAVARUUDEN V^*, KUN MÄÄRITELLÄÄN

$$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u)$$
$$(\alpha\psi)(u) = \alpha(\psi(u))$$
$$\underset{\text{NOLLAFUNKTIO}}{0(u)} = \underset{\text{KOMPLEKSILUKU } 0}{0} \quad \forall u \in V$$

φ ON RAJOITETTU JOS $\exists M > 0$ S.E.

$|\varphi(u)| \leq M \|u\| \quad \forall u \in V$

LAUSE: LINEAARINEN FUNKTIONAALI $\varphi: V \to \mathbb{C}$ BANACH AVARUUDELLA V ON JATKUVA JOS JA VAIN JOS SE ON RAJOITETTU

TOD. 1° φ RAJOITETTU $\Rightarrow |\varphi(u-v)| \leq M \|u - v\|$

OLKOON $\varepsilon > 0$. JOS NYT $\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow$

$|\varphi(u) - \varphi(v)| = |\varphi(u-v)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

SIIS φ ON JATKUVA

2° φ JATKUVA. TÄLLÖIN SE ON ERIKOISESTI JATKUVA ORIGOSSA $u = \vec{0}$, ELI LÖYTYY $\delta > 0$ S.E.

$\|u\| < \delta \Rightarrow |\varphi(u)| < 1$

$v \in V$ MIELIVALTAINEN $\neq \vec{0}$

$$|\varphi(v)| = \left| \frac{2\|v\|}{\delta} \varphi\Big(\underbrace{\frac{\delta}{2} \frac{v}{\|v\|}}_{u,\ \|u\| = \frac{\delta}{2} < \delta} \Big) \right| < \frac{2\|v\|}{\delta} \cdot 1$$

S.O. $\varphi(v) < M \|v\|$ MISSÄ $M = \frac{2}{\delta}$ SIIS φ RAJOITETTU

ESIMERKKI

$V = \ell^1$ = KOMPL. JONOT $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots)$ $(\equiv \ell_1)$

$$\|\underset{\sim}{x}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

$\Big(\alpha \underset{\sim}{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots)$; $\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)$
$\vec{0} = (0, 0, \dots) \Big)$

$C = (c_1, c_2, \dots)$ JONO KOMPLEKSILUKUJA

$$\varphi_c(\underset{\sim}{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$$

ON LINEAARINEN

JOS $|c_i| < C$ KAIKILLE $i = 1, 2, \dots$

φ_c ON RAJOITETTU:

$$|\varphi_c(\underset{\sim}{x})| = \Big|\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i\Big| \le \sum_{i=1}^{\infty} |c_i x_i| \le C \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$$
$$= C \|\underset{\sim}{x}\|$$

JA SIIS JATKUVA

MUTTA ESIM $c_n = n$ $\Rightarrow$ φ_c EI RAJOITETTU
EIKÄ JATKUVA

LISÄÄ KERTAUSTA:

- SISÄTULO: $V \times V \to \mathbb{C}$
  - (S1) $\langle u | v \rangle = \langle v | u \rangle^*$
  - (S2) $\langle u | \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u | v \rangle + \beta \langle u | w \rangle$
  - (S3) $\langle u | u \rangle \ge 0$; $\langle u | u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$

- SISÄTULOAVARUUS ON NORMIAVARUUS:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u | u \rangle}$$

- HILBERT AVARUUS: TÄYDELLINEN SISÄTULO-AVARUUS

SUUNNIKASSÄÄNTÖ: HILBERT AVARUUDESSA

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

TOD.: SUORA LASKU

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v | u+v \rangle + \langle u-v | u-v \rangle =$$
$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 + \langle u|v \rangle + \langle v|u \rangle - \langle u|v \rangle - \langle v|u \rangle$$
$$= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

SEURAUS: $\|u+v\|^2 \le 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

AVARUUS $L^2(X)$ $(\equiv L_2(X))$, $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\|f\|^2 = \int_X d^n x \, |f(x)|^2 < \infty \Leftrightarrow f \in L^2(X)$$

$$\langle f | g \rangle = \int_X d^n x \; f^*(x) \, g(x)$$

SAMAISTETAAN $f(x)$ JA $g(x)$ JOS

$$\int d^3x\, |f(x)-g(x)|^2 = 0$$

("$f = g$ MELKEIN KAIKKIALLA")

$L^2(x)$ ON HILBERT AVARUUS:

RIESZ-FISCHERIN LAUSE

(FRIGYES RIESZ 1880–1956, ERNST FISCHER 1875–1954)

JOS $f_1, f_2, \ldots$ ON CAUCHYN JONO $L^2(x)$:SSA, NIIN ON OLEMASSA $f \in L^2(x)$ S.E.

$\| f - f_n \| \to 0$, $n \to \infty$

(TODISTUKSEN IDEA: VALITAAN OSAJONO $\{f_n\}$ S.E. $\| f_n - f_{n-1} \| < 2^{-n}$ ($f_0(x) \equiv 0$ AS.)

MUOD. $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$;

TÄLLE $\|h\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n - f_{n-1}\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$

$\Rightarrow h^2(x)$ INTEGROTUVA $\Rightarrow h^2(x) < \infty$ MELKEIN KAIKKIALLA ("M.K.")

MÄÄR. $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ NIILLE x JOILLE $|h| < \infty$
$= 0$ ... $= \infty$

HALUTTU $f(x)$ ON $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$

SARJA SUPPENEE ITSEISESTI M.K. $\left(\sum_1^{\infty} |g_n(x)| = h(x)_{M.K.}\right)$

JA $f \in L^2(x)$ KOSKA $|f(x)|^2 \le (h(x))^2$

$f_n \to f$: $\|f - f_n\| = \|\sum^{\infty} g_k\| \le \sum^{\infty} \|g_k\| < \sum^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^n}$)

ALIAVARUUDET. SEPAROITUVUUS

V VEKTORIAVARUUS, $W \subset V$ ON VEKTORIALIAVARUUS JOS $u, v \in W \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

HILBERT AVARUUDEN $\mathcal{H}$ ALIAVARUUS $\mathcal{H}'$ ON $\mathcal{H}$:N VEKTORIALIAVARUUS JOKA ON SULJETTU:

JOS $\|u_n - u\| \to 0$ $n \to \infty$ JA KAIKKI $u_n \in \mathcal{H}'$
$\Rightarrow u \in \mathcal{H}'$

JOS W ON $\mathcal{H}$:N VEKTORIALIAVARUUS SEN SULKEUMA (CLOSURE) $\overline{W}$ ON PIENIN $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS JOKA SISÄLTÄÄ W:N

(OLEELLISESTI $\overline{W}$ SAADAAN LISÄÄMÄLLÄ W:HEN KAIKKIEN W:N ALKIOISTA MUODOSTETTUJEN SUPPENEVIEN JONOJEN RAJA-ARVOT).

OLKOON K $\mathcal{H}$:N MIELIV. OSAJOUKKO.

K:N GENEROIMA VEKTORIALIAVARUUS $L(K)$ ON

$$L(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{C},\ u_i \in K \right\}$$

K:N GENEROIMA $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS ON $\overline{L(K)}$

$\mathcal{H}$ ON SEPAROITUVA JOS LÖYTYY NUMEROITUVA JOUKKO $K = \{u_1, u_2, \ldots\}$ S.E.

$$\mathcal{H} = \overline{L(K)}$$

LÄHTIEN JOUKOSTA $u_1, u_2, \dots$ VOIMME GRAM-SCHMIDTIN ORTONORMITUSTA KÄYTTÄEN MUODOSTAA ORTONORMITETUN (= ON) JOUKON $e_1, e_2, \dots$: $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$

JOKAINEN u_n ON LINEAARIYHDISTELMÄ (JOS KAIKKI u_n LIN. RIIPPUMATTOMIA) VEKTOREISTA $e_1, e_2, \dots, e_n$

$$\mathcal{H} = \overline{L(K)} \iff \mathcal{H} = \overline{L(\{e_1, e_2, \dots\})}$$

VEKTORIT $e_1, e_2, \dots$ MUODOSTAVAT $\mathcal{H}$:N <u>TÄYDELLISEN ORTONORMITETUN KANNAN.</u>

<u>LAUSE</u> JOS $\mathcal{H}$ ON SEPAROITUVA HILBERT AVARUUS JA $\{e_1, e_2, \dots\}$ TÄYDELLINEN O.N. KANTA, NIIN JOKAINEN $u \in \mathcal{H}$ VOIDAAN YKSIKÄSITTEISESTI ESITTÄÄ MUODOSSA

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n ,$$

MISSÄ $c_n = \langle e_n | u \rangle$.

<u>TODISTUS</u> BESSELIN EPÄYHTÄLÖ:

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle e_n | u \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \quad \forall N$$

$\Rightarrow$ SARJA $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n | u \rangle|^2$ SUPPENEE

MÄÄR. $u_N \equiv \sum_{n=1}^{N} \langle e_n | u \rangle e_n$ $\{u_N\}$ ON CAUCHYN JONO: $\|u_N - u_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |\langle e_n | u \rangle|^2 \to 0$ (SUPPENEVA JONO ON CAUCHYN JONO)
$(N > M)$

$\Rightarrow$ $u_N \xrightarrow[N \to \infty]{} u' \in \mathcal{H}$ (TÄYDELLISYYS)

APUTULOS 1: JOS $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ HILBERT AVARUUDESSA $\mathcal{H}$, NIIN $\langle u | v_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u | v \rangle$ KAIKILLE $u \in \mathcal{H}$
("HEIKKO SUPPENEMINEN")

TOD.: $|\langle u | v_n \rangle - \langle u | v \rangle| = |\langle u | v_n - v \rangle| \overset{\text{SCHWARZ}}{\leq}$

$$\leq \|u\| \|v_n - v\| \to 0 \quad n \to \infty$$

NYT $\langle e_k | u - u' \rangle = \langle e_k | u \rangle - \langle e_k | u' \rangle \overset{\text{APUTULOS}}{=} \langle e_k | u \rangle$

$- \lim_{N\to\infty} \langle e_k | u_N \rangle$

MUTTA $\langle e_k | u_N \rangle = \langle e_k | u \rangle$ KUN $N \geq k$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \langle e_k | u_N \rangle = \langle e_k | u \rangle \Rightarrow \langle e_k | u - u' \rangle = 0$

$\forall k$.

APUTULOS 2: JOS $\{e_k\}$ ON TÄYDELLINEN O.N. KANTA JA $\langle v | e_k \rangle = 0$ $\forall k = 1, 2, \dots$, NIIN $v = \vec{0}$

TOD.: $\mathcal{H} = \overline{L(\{e_1, e_2, \dots\})}$, JOTEN JOKAISELLE $v \in \mathcal{H}$ $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ MISSÄ $v_n = \sum_{i=1}^{N_n} v_{ni} e_i$

$\langle v | e_k \rangle = 0 \ \forall k \Rightarrow \langle v | v_n \rangle = 0$

$$\|v\|^2 = \langle v | v \rangle \underset{\text{APUTULOS 1}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle v | v_n \rangle = 0 \Rightarrow v = \vec{0}$$

APUTULOKSEN 2 MUKAAN $\langle e_k | u - u' \rangle = 0$ $\forall k$

$\Rightarrow u - u' = \vec{0}$ ELI

$$u = u' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n | u \rangle e_n$$

$\square$

LAUSE $L^2([a,b])$ ON SEPAROITUVA

TODISTUKSEN IDEA: WEIERSTRASSIN APPROKSIMAATIOLAUSEEN NOJALLA $f \in L^2([a,b])$ VOIDAAN APPROKSIMOIDA MIELIV. TARKASTI POLYNOMILLA $P(x)$: $\|f - P\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow L^2([a,b]) = \overline{L(1, x, x^2, \dots)} \quad \square.$$

KANTA: ORTOGONAALISET POLYNOMIT $[a,b]$:LLÄ

$$\int_a^b dx\, P_m(x) P_n(x) = \delta_{mn}$$

(KONSTRUOIDAAN ESIM. LEGENDREN POLYNOMEISTA LÄHTIEN)

LAUSE $L^2(\mathbb{R})$ ON SEPAROITUVA

TODISTUKSEN IDEA:

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{L(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots)}$$

MISSÄ

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2}$$

$H_n(x)$: HERMITEN POLYNOMIT

$\Rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ SEPAROITUVA

$$\left(\varphi_{n_1 n_2 \dots n_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \varphi_{n_1}(x_1) \varphi_{n_2}(x_2) \cdots \varphi_{n_N}(x_N) \right)$$

APULAUSE 3: JOS $u_n \to u$ JA $v_n \to v$, NIIN

$$\langle u_n | v_n \rangle \to \langle u | v \rangle$$

TOD.: $|\langle u_n | v_n\rangle - \langle u | v\rangle| =$

$$= |\langle u_n | v_n\rangle - \langle u_n | v\rangle + \langle u_n | v\rangle - \langle u | v\rangle|$$

$$\leq |\langle u_n | v_n\rangle - \langle u_n | v\rangle| + |\langle u_n | v\rangle - \langle u | v\rangle|$$

$$\overset{\text{SCHWARZ}}{\leq} \|u_n\| \|v_n - v\| + \|u_n - u\| \|v\| \to 0$$

LAUSE (PARSEVAL) $\langle u | v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u | e_i\rangle \langle e_i | v\rangle$

(MISSÄ $\{e_i\}$ TÄYDELLINEN O.N. KANTA)

TOD. MÄÄR

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | u\rangle e_i \to u \quad n \to \infty$$

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i | v\rangle e_i \to v \quad n \to \infty$$

$$\langle u | v\rangle \overset{\text{APULAUSE 3}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle u_n | v_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle u | e_i\rangle \langle e_i | e_j\rangle \langle e_j | v\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle u | e_i\rangle \langle e_i | v\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u | e_i\rangle \langle e_i | v\rangle$$

$$\Rightarrow \|u\|^2 = \langle u | u\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i | u\rangle|^2$$

ORTOGONAALISET ALIAVARUUDET

$u, v \in \mathcal{H}$ OVAT ORTOGONAALISIA $(u \perp v)$ JOS $\langle u|v\rangle = 0$.

OLKOON V $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS, SEN ORTOGONAALINEN KOMPLEMENTTI

$$V^\perp = \{u \mid u \perp v \quad \forall v \in V\}$$

$V^\perp$ ON MYÖS $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS :

1) VEKTORIALIAVARUUS : $u, u' \in V^\perp$

$$\Rightarrow \langle \alpha u + \beta u' | v\rangle = \alpha^* \langle u|v\rangle + \beta^* \langle u'|v\rangle$$

$$= 0 + 0 = 0 \qquad v \in V$$

$$\Rightarrow \alpha u + \beta u' \in V^\perp$$

2) SULJETTU : $u_n \to u$, $u_n \in V^\perp$

$$\langle u|v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n|v\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\Rightarrow u \in V^\perp$$

HUOM. $V \cap V^\perp = \{\vec{0}\}$ ($\vec{0}$ AINOA VEKTORI JOKA KUULUU SEKÄ V:HEN ETTÄ $V^\perp$:HEN)

KOSKA JOS $w \in V \cap V^\perp$

$$\langle w|w\rangle = 0 \Rightarrow w = \vec{0}$$

LAUSE JOS V ON HILBERT AVARUUDEN $\mathcal{H}$ ALIAVARUUS NIIN JOKAINEN $u \in \mathcal{H}$ VOIDAAN YKSIKÄSITTEISESTI HAJOITTAA MUOTOON

$$u = u' + u''$$

MISSÄ $u' \in V$ JA $u'' \in V^\perp$

TODISTUS (AIKAISEMMIN OSOITIMME ↑ TAPAUKSESSA $V = \overline{L(\{e_1, e_2, \ldots, e_N\})}$ NYT TEHDÄÄN SE YLEISESTI)

$u \in \mathcal{H}$ ANNETTU. MERK. $d = \inf\{\|u - v\| \mid v \in V\}$

SUURIN ALARAJA

OLKOON $\{v_n\}$ JONO V:N VEKTOREITA S.E.

$$\|u - v_n\| \to d \qquad n \to \infty$$

$\{v_n\}$ ON CAUCHYN JONO :

SUUNNIKASSÄÄNTÖ ANTAA

$$\underbrace{\|u - \tfrac{1}{2}(v_n + v_m) + \tfrac{1}{2}(v_n - v_m)\|^2}_{\|u - v_m\|^2} + \underbrace{\|u - \tfrac{1}{2}(v_n + v_m) - \tfrac{1}{2}(v_n - v_m)\|^2}_{\|u - v_n\|^2}$$

$$= 2\|u - \tfrac{1}{2}(v_n + v_m)\|^2 + 2\|\tfrac{1}{2}(v_n - v_m)\|^2$$

$$\Rightarrow \|v_n - v_m\|^2 = 2\underbrace{\|u - v_m\|^2}_{\to d^2} + 2\underbrace{\|u - v_n\|^2}_{\to d^2} - 4\underbrace{\|u - \tfrac{1}{2}(v_n + v_m)\|^2}_{\to d^2}$$

$$\to 0 \qquad n, m \to \infty$$

V SULJETTU $\Rightarrow \exists\, u' \in V$ S.E. $v_n \to u'$

MÄÄR. $u'' = u - u'$

$$\|u''\| = \lim_{n\to\infty} \|u - v_n\| = d$$

OSOITETAAN: $u'' \in V^\perp$

$v \in V$, $v_0 = \frac{v}{\|v\|}$ s.e. $\|v_0\| = 1$

VEKTORI $\underset{V}{\underset{\cap}{u'}} + \langle v_0 | u'' \rangle \underset{V}{\underset{\cap}{v_0}} \in V$

$$\Rightarrow d^2 \le \| u - (u' + \langle v_0 | u'' \rangle v_0) \|^2 = \| u'' - \langle v_0 | u'' \rangle v_0 \|^2$$

$$= \langle u'' - \langle v_0 | u'' \rangle v_0 \,|\, u'' - \langle v_0 | u'' \rangle v_0 \rangle = \|u''\|^2 - |\langle v_0 | u'' \rangle|^2$$

$$= d^2 - |\langle v_0 | u'' \rangle|^2$$

TÄMÄ ON MAHDOLLISTA VAIN JOS $\langle v_0 | u'' \rangle = 0$

ELI $\langle v | u'' \rangle = 0 \Rightarrow u'' \in V^\perp$

SIIS $u = \underset{V}{\underset{\cap}{u'}} + \underset{V^\perp}{\underset{\cap}{u''}}$

YKSIKÄSITTEISYYS: JOS $u = u' + u'' = \overset{V}{\overset{\cup}{v'}} + \overset{V^\perp}{\overset{\cup}{v''}}$

$$\Rightarrow \underset{V}{\underset{\cap}{u' - v'}} = \underset{V^\perp}{\underset{\cap}{v'' - u''}}$$

MUTTA AINOA YHTEINEN VEKTORI ON $\vec{0}$:

$\Rightarrow u' = v'$ JA $u'' = v''$ □.

SEURAUS: $V^{\perp\perp} = V$

TODISTUS: 1) $u \in V \Rightarrow \langle v | u \rangle = 0 \quad \forall u \in V^\perp \Rightarrow \underline{V \subseteq V^{\perp\perp}}$

2) OL. $v \in V^{\perp\perp}$. $v = \overset{V}{\overset{\cup}{v'}} + \overset{V^\perp}{\overset{\cup}{v''}}$. 1)-KOHDAN MUKAAN

$v' \in V \subset V^{\perp\perp} \Rightarrow v'' = v - v' \in V^{\perp\perp}$ JA $\in V^\perp$

$\Rightarrow v'' = \vec{0}$ JA SIIS $v \in V \Rightarrow \underline{V^{\perp\perp} \subseteq V}$

$V \subseteq V^{\perp\perp}$ & $V^{\perp\perp} \subseteq V \Rightarrow V = V^{\perp\perp}$

HILBERT AVARUUDEN JATKUVAT FUNKTIONAALIT

$v \in \mathcal{H}$. FUNKTIONAALI $u \mapsto \langle v | u \rangle$ ON LINEAARINEN JA JATKUVA ($u_n \to u \Rightarrow \langle v | u_n \rangle \to \langle v | u \rangle$, TAI KÄYTTÄEN SCHWARZ: $|\langle v | u \rangle| \le \|v\| \|u\| \Rightarrow \langle v | u \rangle$ RAJOITETTU JA SIIS JATKUVA). SEURAAVA LAUSE OSOITTAA ETTÄ KAIKKI JATKUVAT FUNKTIONAALIT OVAT TÄTÄ MUOTOA

LAUSE (RIESZIN ESITYSLAUSE): JOS φ ON JATKUVA FUNKTIONAALI HILBERT AVARUUDESSA $\mathcal{H}$, NIIN ON OLEMASSA YKSIKÄSITTEINEN VEKTORI $v \in \mathcal{H}$ S.E. $\varphi(u) = \langle v | u \rangle \quad \forall u \in \mathcal{H}$

TODISTUS: OLKOON $V = \{ x \in \mathcal{H} \mid \varphi(x) = 0 \}$

V ON $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS: 1) $x, y \in V \Rightarrow \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) = 0$

2) $x_n \in V$ JONO $(\varphi(x_n) = 0)$ JA $x_n \to x$ $n \to \infty$

$\Rightarrow \varphi(x) = 0$ KOSKA φ JATKUVA

JOS $V = \mathcal{H}$ $\varphi(u) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}$ JA VOIDAAN VALITA $v = \vec{0}$ $(\langle \vec{0} | u \rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H})$

JOS $V \neq \mathcal{H}$ LÖYTYY VEKTORI $w \neq \vec{0}$ S.E. $w \notin V$. EDELLÄ TODISTETUN LAUSEEN MUKAAN w:LLÄ ON 1-KÄS. HAJOITELMA $w = w' + w''$

$$\varphi(w'') = \varphi(w - w') = \varphi(w) - \underset{0}{\varphi(w')} = \varphi(w) \neq 0$$

MIELV. u:LLE VOIDAAN KIRJOITTAA

$$u = \underbrace{u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(w'')} w''}_{\in V \text{ KOSKA}} + \underbrace{\frac{\varphi(u)}{\varphi(w'')} w''}_{\in V^{\perp}}$$

$$\varphi\left(u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(w'')} w''\right) = \varphi(u) - \varphi(u) = 0$$

OLKOON NYT $v = \dfrac{\varphi(w'')^*}{\|w''\|^2} w'' \in V^{\perp}$

$$\langle v | u \rangle = \frac{\varphi(w'')}{\|w''\|^2} \left\langle w'' \,\middle|\, \frac{\varphi(u)}{\varphi(w'')} w'' \right\rangle$$

$$= \frac{\varphi(u)}{\|w''\|^2} \langle w'' | w'' \rangle = \varphi(u)$$

LÖYDETTY v ON YKSIKÄSITTEINEN, SILLÄ JOS

$\langle v' | u \rangle = \langle v | u \rangle \quad \forall u \Rightarrow \langle v' - v | u \rangle = 0 \quad \forall u$

VALITAAN $u = v' - v \Rightarrow \|v' - v\|^2 = 0 \Rightarrow v' = v$ □

RIESZIN ESITYSLAUSE SANOO ETTÄ ON OLEMASSA

1-1 VASTAVUUS $\mathcal{H}^* \approx \mathcal{H}$

$$\varphi \leftrightarrow v$$

OPERAATTORIT

V NORMITETTU VEKTORIAVARUUS. OPERAATTORI A ON LINEAARINEN KUVAUS $A : V \to V$, $u \mapsto Au$, $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v$

A ON JATKUVA JOS $u_n \to u \Rightarrow A u_n \to A u$

ELI JOKAISELLE $\varepsilon > 0$ LÖYTYY $\delta > 0$ S.E.

$\|u - v\| < \delta \Rightarrow \|Au - Av\| < \varepsilon$

A ON RAJOITETTU JOS ON OLEMASSA $K > 0$

S.E. $\quad \|Au\| \leq K \|u\| \quad \forall u \in V$

LAUSE $\quad A$ RAJOITETTU $\Leftrightarrow A$ JATKUVA

TOD. 1) $\Rightarrow \quad \varepsilon > 0$. JOS $\|u - v\| < \dfrac{\varepsilon}{K}$

$$\Rightarrow \|Au - Av\| = \|A(u - v)\| \leq \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$$

2) $\Leftarrow$ JOS A EI OLISI RAJOITETTU, PITÄISI JOKAISELLE $N > 0$ LÖYTYÄ u_N S.E. $\|A u_N\| \geq N \|u_N\|$

MÄÄR. $\quad w_N = \dfrac{u_N}{N \|u_N\|} \Rightarrow \|w_N\| = \dfrac{1}{N}$

$$\|A w_N\| \geq \frac{1}{N \|u_N\|} N \|u_N\| = 1$$

MUTTA $\|w_N\| \to 0$ JA $\|A w_N\| \not\to 0$

RISTIRIITA A:N JATKUVUUDEN KANSSA. SIIS A:N ON OLTAVA RAJOITETTU □

RAJOITETUN OPERAATTORIN A NORMI ON

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \le 1} \|Au\|$$

$$\Rightarrow \|Av\| = \|v\| \left\| A \frac{v}{\|v\|} \right\| \le \|v\| \|A\| \quad \forall v$$

ESIM. 1) $A = id_V \qquad id_V u = u \quad \forall u \in V$

IDENTTINEN OPERAATTORI ELI YKSIKKÖOPERAATTORI

$$\|id_V\| = 1$$

2) $V = \ell^2$ (JONOT $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ S.E. $\|\underset{\sim}{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$)

MÄÄR. SIIRTO-OPERAATTORIT S, S' :

$$S((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$$S'((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

$$\|S\underset{\sim}{x}\|^2 = 0 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|\underset{\sim}{x}\|^2$$

$$\|S'\underset{\sim}{x}\|^2 = \sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^2 = \|\underset{\sim}{x}\|^2 - |x_1|^2 \le \|\underset{\sim}{x}\|^2$$

MOLEMMAT RAJOITETTUJA

$\|S\| = 1$ ILMEISESTI, MUTTA MYÖS $\|S'\| = 1$

(JONOLLE $\underset{\sim}{y} = (0, y_2, y_3, \dots)$ $S'\underset{\sim}{y} = (y_2, y_3, \dots)$

JA $\|S'y\|^2 = \|y\|^2$)

OPERAATTORIEN $A : V \to V$ JA $B : V \to V$

TULO MÄÄRITELLÄÄN :

$$(AB)u = A(Bu) \qquad \Rightarrow A(BC) = (AB)C$$

TULO ASSOSIATIIVINEN

ILMEISESTI $id_V A = A\, id_V = A$

$A^2 = A \cdot A$, $A^k = A \cdot A^{k-1} = A^{k-1} \cdot A$

SOVITAAN : $A^0 = id_V$

JOS A ON RAJOITETTU JA LÖYTYY RAJOITETTU OPERAATTORI A^{-1} S.E. $AA^{-1} = A^{-1}A = id_V$ (HUOM.! MOLEMPIEN ON OLTAVA VOIMASSA!), NIIN A^{-1} ON A:N KÄÄNTEISOPERAATTORI

JOS SE ON OLEMASSA, KÄÄNTEISOPERAATTORI ON YKSIKÄSITTEINEN (JOS $BA = A^{-1}A = id_V \mid A^{-1}$ $\Rightarrow B = BAA^{-1} = A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$)

ESIM. $S'S((x_1, x_2, x_3, \dots)) = S'((0, x_1, x_2, \dots))$
$= (x_1, x_2, x_3, \dots) \quad \Rightarrow S'S = id_{\ell^2}$

MUTTA $SS'((x_1, x_2, x_3, \dots)) = S((x_2, x_3, x_4, \dots))$
$= (0, x_2, x_3, \dots) \quad \Rightarrow SS' \ne id_{\ell^2}$

$\Rightarrow S'$ EI OLE S:N KÄÄNTEISOPERAATTORI

(S^{-1} EI OLE OLEMASSA)

LAUSE JOS V ON BANACH AVARUUS JA A RAJOITETTU OPERAATTORI V:LLÄ S.E. $\|A\| < 1$, NIIN $id_V - A$:LLA ON KÄÄNTEISOPERAATTORI

$$(id_V - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

TODISTUS $x \in V$ $\|A^k x\| \le \|A\| \, \|A^{k-1}x\| \le \|A\|^2 \|A^{k-2}x\|$
$\le \dots \le \|A\|^k \|x\|$

$\Rightarrow A^k$ RAJOITETTU JA $\|A^k\| \le \|A\|^k$

VEKTORIT $u_n = (id_V + A + A^2 + \dots + A^n)x$ MUODOSTAVAT CAUCHYN JONON:

$$\|u_n - u_m\| = \|(A^{m+1} + A^{m+2} + \dots + A^n)x\| \le$$
$$\le (\|A\|^{m+1} + \|A\|^{m+2} + \dots + \|A\|^n)\|x\| \le \frac{\|A\|^{m+1}}{1 - \|A\|} \|x\|$$
$$\to 0 \quad m \to \infty$$

V BANACH AVARUUS $\Rightarrow$ $\exists u \in V$ S.E. $u_n \to u$

MÄÄR. OPERAATTORI $T: V \to V$ $Tx = u$

T ON LINEAARINEN JA

$$\left(T - \sum_{k=0}^{m} A^k\right)x = u - u_m \to \vec{0} \quad m \to 0,$$

SIIS VOIMME KIRJOITTAA $T = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$

$$(id_V - A)T = id_V + A + A^2 + \dots - A - A^2 - \dots = id_V$$
$$= T(id_V - A) \quad \Rightarrow \quad T = (id_V - A)^{-1}$$

ADJUNGOITU OPERAATTORI

OLKOON NYT $V = \mathcal{H}$ HILBERT AVARUUS JA $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ RAJOITETTU LINEAARINEN OPERAATTORI $\mathcal{H}$:LLA

ADJUNGOITU OPERAATTORI $A^+: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ MÄÄRITELLÄÄN YHTÄLÖN

$$\langle u | Av \rangle = \langle A^+ u | v \rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{H}$$

AVULLA.

MÄÄRITELMÄ ON MIELEKÄS, SILLÄ KUN u ON ANNETTU, FUNKTIONAALI $\varphi_u(v) = \langle u | Av \rangle$ ON LINEAARINEN JA JATKUVA ($|\varphi_u(v)| = |\langle u | Av \rangle| \underset{\text{SCHWARZ}}{\le} \|u\| \|Av\| \le \underbrace{\|u\| \|A\|}_{=M} \|v\|$, SIIS RAJOITETTU)

RIESZIN ESITYSLAUSEEN NOJALLA LÖYTYY SIIS 1-KÄS. VEKTORI A^+u S.E. $\varphi_u(v) = \langle A^+ u | v \rangle$.

A^+ ON LINEAARINEN: $\langle A^+(\alpha u + \beta w) | v \rangle = \langle \alpha u + \beta w | Av \rangle$
$= \alpha^* \langle u | Av \rangle + \beta^* \langle w | Av \rangle = \alpha^* \langle A^+ u | v \rangle + \beta^* \langle A^+ w | v \rangle$
$= \langle \alpha A^+ u + \beta A^+ w | v \rangle$

JA RAJOITETTU: $\|A^+ u\|^2 = \langle A^+ u | A^+ u \rangle = \langle u | AA^+ u \rangle$
$\le \|u\| \, \|AA^+ u\| \le \|u\| \, \|A\| \, \|A^+ u\|$

$\Rightarrow$ JOKO $\|A^+ u\| = 0$ TAI $\|A^+ u\| \le \|A\| \, \|u\|$

MOLEMMISSA TAPAUKSISSA $\|A^+ u\| \le \|A\| \, \|u\|$

ESIMERKKEJÄ

1) SIIRTO-OPERAATTORIT ℓ^2:SSA

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$
$$S'(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

$$\langle y | S x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^* (Sx)_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_{i+1}^* x_i$$
$$\langle S' y | x \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (S'y)_i^* x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_{i+1}^* x_i$$
$$\Rightarrow S^+ = S'$$

VASTAAVASTI $S'^+ = S$

2) $\mathcal{H} = L^2(X)$, α RAJOITETTU FUNKTIO $X \to \mathbb{C}$, $|\alpha(x)| \leq M$, $x \in X$

KERTOMISOPERAATTORI $(A_\alpha f)(x) = \alpha(x) f(x)$

ON RAJOITETTU: $\|A_\alpha f\|^2 = \int_X dx \underbrace{|\alpha(x)|^2}_{\leq M^2} |f(x)|^2$

$$\leq M^2 \int_X dx\, |f(x)|^2 = M^2 \|f\|^2$$

$$\langle f | A_\alpha g \rangle = \int_X dx\, f^*(x)\, \alpha(x)\, g(x) =$$
$$= \int_X dx\, (\alpha^* f)^* g = \langle \alpha^* f | g \rangle$$
$$\Rightarrow (A_\alpha^+ f)(x) = \alpha^*(x) f(x)$$

OPERAATTORIN A <u>MATRIISIELEMENTTI</u> VEKTORIEN u JA v VÄLILLÄ ON $\langle u | A v \rangle$.
JOS $\mathcal{H}$ ON SEPAROITUVA JA $\{e_i\}$ SEN O.N. KANTA VOIDAAN KIRJOITTAA

$$A e_j = \sum_{i=1}^{\infty} e_i a_{ij}$$

MISSÄ a_{ij} ON MATRIISIELEMENTTI

$$a_{ij} = \langle e_i | A e_j \rangle$$

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i e_i, \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i e_i$$

$$A v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i A e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} v_i a_{ji} e_j$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} v_i \right) e_j$$
$$\langle u | A v \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_j^* a_{ji} v_i$$

OPERAATTORITULOLLE

$$\langle e_i | A B e_j \rangle = \langle A^+ e_i | B e_j \rangle \overset{\text{PARSEVAL}}{=}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \langle A^+ e_i | e_k \rangle \langle e_k | B e_j \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_i | A e_k \rangle \langle e_k | B e_j \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} = (ab)_{ij}$$

ANNETUSSA KANNASSA VOIDAAN SIIS OPERAATTORIA KUVATA (YL. $\infty \times \infty$) MATRIISILLA (a_{ij})

ADJUNGOIDUN OPERAATTORIN MATRIISI:

$$a_{ij} = \langle e_i | A e_j \rangle = \langle A^+ e_i | e_j \rangle = \langle e_j | A^+ e_i \rangle^* = (a^+_{ji})^*$$

ADJUNGOIDUN OPERAATTORIN MATRIISI ON SIIS OPERAATTORIN MATRIISIN HERMIITTINEN KONJUGAATTI

$$\left((M^+)_{ij} = M^*_{ji} \right)$$

HERMIITTISET OPERAATTORIT

OPERAATTORI A ON HERMIITTINEN JOS $A^+ = A$. TÄSTÄ SEURAA

$$\langle u | A v \rangle = \langle A^+ u | v \rangle = \langle A u | v \rangle$$

$\mathcal{H}$ SEPAROITUVA $\{e_i\}$ O.N. KANTA

$$a_{ij} = \langle e_i | A e_j \rangle = \langle A e_i | e_j \rangle = \langle e_j | A e_i \rangle^* = a^*_{ji}$$

ELI HERMIITTISEN OPERAATTORIN MATRIISI ON HERMIITTINEN

$$\left(M^+ = M \Rightarrow M_{ij} = M^*_{ji} \right)$$

PROJEKTIO-OPERAATTORIT

M HILBERTAVARUUDEN $\mathcal{H}$ ALIAVARUUS

$u \in \mathcal{H}$ 1-KÄS. HAJOITELMA

$$u = u' + u'' \qquad u' \in M, \; u'' \in M^\perp$$

MÄÄRITTELEMME PROJEKTIO-OPERAATTORIN

$$P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \qquad P_M u = u'$$

JA KUTSUMME u' VEKTORIN u (KOHTISUORAKSI) PROJEKTIOKSI ALIAVARUUDELLE M

LAUSE JOKAISELLE ALIAVARUUDELLE M PROJEKTIO-OPERAATTORI P_M ON RAJOITETTU, HERMIITTINEN JA TOTEUTTAA $P_M^2 = P_M$. KÄÄNTÄEN JOKAINEN YHTÄLÖÄ $P^2 = P$ (ENGL. "IDEMPOTENT") TOTEUTTAVA HERMIITTINEN OPERAATTORI ON PROJEKTIO-OPERAATTORI JOLLEKIN $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUDELLE.

TOD. 1) $P_M^+ = P_M$:

$$\langle u | P_M v \rangle = \langle u | v' \rangle = \langle u' + u'' | v' \rangle = \langle u' | v' \rangle$$
$$= \langle u' | v' + v'' \rangle = \langle u' | v \rangle = \langle P_M u | v \rangle$$

2) P_M RAJOITETTU: $\|P_M u\|^2 = \|u'\|^2 \leq \|u'\|^2 + \|u''\|^2$

$= \|u' + u''\|^2 = \|u\|^2$, SIIS $\|P_M u\|^2 \leq \|u\|^2$

3) $P_M^2 = P_M$: $\quad P_M^2 u = P_M u' = u' = P_M u \quad \forall u \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow P_M^2 = P_M$

4) OLKOON $P^+ = P$ JA $P^2 = P$. P ON RAJOITETTU, KOSKA $\|Pu\|^2 = |\langle Pu | Pu \rangle| =$

$= |\langle u | P^2 u \rangle| = |\langle u | Pu \rangle| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SCHWARZ}}}{\leq} \|u\| \, \|Pu\|$

$\Rightarrow$ JOKO $\|Pu\| = 0$ TAI $\|Pu\| \leq \|u\|$

P RAJOITETTU

5) P PROJEKTIO-OPERAATTORI :

OLKOON $M = \{ u \mid u = Pu \}$. M ON VEKTORI-ALIAVARUUS ($u = Pu$ & $v = Pv \Rightarrow P(\alpha u + \beta v) = \alpha Pu + \beta Pv = \alpha u + \beta v$)

M SULJETTU : JOS $u_n \to u$ JA $Pu_n = u_n$ $n = 1, 2, \ldots$

$u = \lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} Pu_n \underset{\substack{\uparrow \\ P \text{ JATKUVA}}}{=} Pu$

M ON SIIS $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS.

$v \in \mathcal{H}$. MÄÄRITELLÄÄN $v' = Pv$

$v'' = (id_{\mathcal{H}} - P)v = v - v'$

$v'' \in M^{\perp}$ KOSKA JOS $w \in M$

$\langle v'' | w \rangle = \langle v - Pv | w \rangle = \langle v | w \rangle - \langle Pv | w \rangle \overset{P^+ = P}{=}$

$= \langle v | w \rangle - \langle v | Pw \rangle = \langle v | w \rangle - \langle v | w \rangle = 0$

SIIS P = PROJEKTIO-OPERAATTORI M:LLE $\square$.

UNITAARISET OPERAATTORIT

$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ON UNITAARINEN JOS

$\langle Uu | Uv \rangle = \langle u | v \rangle \quad \forall \, u, v \in \mathcal{H}$

JA U^{-1} ON OLEMASSA.

$\Rightarrow \langle U^+ U u | v \rangle = \langle u | v \rangle \quad \forall u, v$

$\Rightarrow U^+ U = id_{\mathcal{H}}$ ELI $U^+ = U^{-1}$

$\Uparrow$ U RAJOITETTU

ERIKOISESTI $\langle Uu | Uu \rangle = \| Uu \|^2 = \langle u | u \rangle = \|u\|^2$

ELI U ON ISOMETRINEN (JÄTTÄÄ NORMIN ENNALLEEN)

KÄÄNTÄEN JOKAINEN ISOMETRINEN, KÄÄNTYVÄ (S^{-1} OLEMASSA) OPERAATTORI S ($\|Su\| = \|u\| \; \forall u$) ON UNITAARINEN :

$\langle S(u+v) | S(u+v) \rangle - i \langle S(u+iv) | S(u+iv) \rangle =$

$= \langle Su | Su \rangle + \langle Su | Sv \rangle + \langle Sv | Su \rangle + \langle Sv | Sv \rangle$

$- i \langle Su | Su \rangle + \langle Su | Sv \rangle - \langle Sv | Su \rangle - i \langle Sv | Sv \rangle =$

$= \langle u+v | u+v \rangle - i \langle u+iv | u+iv \rangle = \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle$

$+ \langle v | u \rangle + \langle v | v \rangle - i \langle u | u \rangle + \langle u | v \rangle - \langle v | u \rangle - i \langle v | v \rangle$

KUMOUTUVAT KOSKA S ISOMETRINEN

$\Rightarrow \cancel{2} \langle Su | Sv \rangle = \cancel{2} \langle u | v \rangle$

ELI S UNITAARINEN