GREENIN FUNKTION MENETELMÄ

(GEORGE GREEN 1793 – 1841)

L_x : LINEAARINEN OSITTAIS DIFFERENTIAALI-OPERAATTORI $\mathbb{R}^n$:SSÄ

HALUAMME RATKAISTA $L_x u(x) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

OPERAATTORIN L_x <u>GREENIN</u> <u>FUNKTIO</u> $G(x,y)$

ON YHTÄLÖN

$$L_x G(x,y) = \delta_n(x-y)$$

RATKAISU. $\Rightarrow$ $\boxed{u(x) = \int d^n y \, G(x,y) f(y)}$ ON RATK.

HUOM. 1. ARFKEN-WEBER MÄÄRITTELEE $L_x G = \frac{1}{4}\delta$

2. JOS HOMOG. YHTÄLÖLLÄ $L_x u = 0$ ON RATKAISU.IA $u^{(0)}(x) \neq 0$, $G(x,y)$ EI OLE YKSIKÄSITTEINEN, VAAN $G(x,y)$ JA $G'(x,y) = G(x,y) + h(x,y)$, $L_x h(x,y) = 0$ KELPAAVAT YHTÄ HYVIN. G SAADAAN YKSIKÄSITTEISEKSI ASETTAMALLA SOPIVIA REUNAEHTOJA

3. $f(x) \rightarrow \int d^n y \, G(x,y) f(y)$ ON OPERAATTORIN L_x "KÄÄNTEISOPERAATTORI"

$$L_x \int d^n y \, G(x,y) f(y) = \int d^n y \, \delta_n(x-y) f(y) = f(x)$$

DISTRIBUUTIOT $\mathbb{R}^n$:SSÄ

(YLEISTETYT FUNKTIOT)

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

DISTRIBUUTIO : LINEAARINEN FUNKTIONAALI TESTIFUNKTIOISTA REAALILUVUILLE

TESTIFUNKTIOAVARUUKSIA :

S_n : FUNKTIOT JOILLA KAIKKIEN KERTALUKUJEN JATKUVAT OSITTAISDERIVAATAT ("$C^\infty(\mathbb{R}^n)$") JA JOIDEN KAIKKI OS. DERIVAATAT JA FUNKTIOT ITSE $\rightarrow 0$ NOPEAMMIN KUIN MIKÄ TAHANSA POTENSSI KUN $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \rightarrow \infty$

$$\lim_{|x| \to \infty} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} = 0$$

$(|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \qquad \alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$

D_n : C^∞ - FUNKTIOT f, JOILLE $\exists R_f$ S.E.

$f(x) = 0 \quad |x| \geq R_f$

(FUNKTIOT, JOILLA "KOMPAKTI KANTAJA")

ESIM. δ_n : $f \in S_n$ TAI D_n

$$\delta_n[f] = f(0) = f(0, 0, \dots, 0)$$

N-ULOTT. δ-FUNKTIO

TAVALLINEN MERKINTÄ :

$$\delta_n[f] = \int d^n x \; \delta_n(x)\, f(x) = f(0)$$

DISTRIBUUTIOILLA ON OLEMASSA KAIKKI OSITTAISDERIVAATAT :

$f \in S_n$ TAI D_n DISTRIBUUTIO $T : f \to T[f]$

MÄÄRITELMÄ :

$$\frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} [f] \equiv (-1)^{|\alpha|}\, T\left[\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]$$

ESIMERKKI $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

$$\nabla^2 \delta_n[f] = \delta_n[\nabla^2 f] = \nabla^2 f \Big|_0$$

TAI

$$\int d^n x \,(\nabla^2 \delta_n(x))\, f(x) = \int d^n x \; \delta_n(x)\, \nabla^2 f(x) = \nabla^2 f(0)$$

FOURIER'N MUUNNOS :

$$\delta_n(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \; e^{i k\cdot(x-y)}$$

MISSÄ

$$k\cdot(x-y) = \sum_{i=1}^{n} k_i (x_i - y_i)$$

TAVALLISET FUNKTIOT DISTRIBUUTIOINA

OLKOON $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ RAJOITETTU FUNKTIO :
$|F(x)| < \infty$ KAIKILLE $x \in \mathbb{R}^n$
MÄÄRITTELEMME VASTAAVAN DISTRIBUUTION

$$F[f] \equiv \int dx_1 \cdots dx_n \; F(x)\, f(x) \qquad f \in S_n \text{ TAI } D_n$$

DISTRIBUUTION DERIVAATAN MÄÄRITELMÄ OTETTU VASTAAMAAN TÄTÄ LAJIA, ESIM.

$$n=1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, F'(x) f(x) = \underbrace{\Big/_{-\infty}^{\infty} F(x) f(x)}_{=0 \;\; f\in S_1 \text{ TAI } D_1} - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, F(x) f'(x)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, F(x) f'(x)$$

$$= -F[f']$$

HUOM. MYÖS JOILLEKIN EI-RAJOITETUILLE FUNKTIOILLE VOIDAAN MÄÄR. VAST. DISTRIBUUTIO :

$n=2$ $\quad d^2x = dx\,dy = d\rho\, \rho\, d\varphi$

$$F(\rho) = \frac{1}{\rho} \Rightarrow F[f] = \int_0^{\infty} d\rho\, \rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{\rho} f(\rho,\varphi)$$

$$= \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(\rho,\varphi)$$

$n=3$ $\quad d^3x = dr\, r^2\, d\theta \sin\theta\, d\varphi$

$F = \frac{1}{r^k}$ $\quad k=1,2$ MÄÄR. VAST. DISTR.

LAPLACEN OPERAATTORIN GREENIN FUNKTIO $\mathbb{R}^3$:SSA, $\mathbb{R}^2$:SSA

1° $\mathbb{R}^3$

KÄSITELLÄÄN $r=0$:SSA SINGULAARISTA FUNKTIOTA $\frac{1}{r}$ DISTRIBUUTIONA $\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right)$

$f \in S_3$ TAI D_3

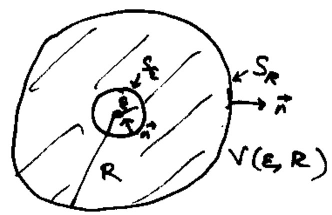
$$\int d^3x \left(\nabla^2 \frac{1}{r}\right) f(\vec{x}) =$$

$$= \nabla^2 \frac{1}{r}[f] = \frac{1}{r}[\nabla^2 f] \equiv \int d^3x \, \frac{1}{r} \nabla^2 f$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{V(\varepsilon,R)} d^3x \, \frac{1}{r} \nabla^2 f$$

$d^3x = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$
$\frac{1}{r}\nabla^2 f$ INTEGROITUVA

V(ε,R) ON ORIGOKESKEINEN R-SÄTEINEN PALLO, JOSTA ON POISTETTU ORIGOKESKEINEN ε-SÄTEINEN PALLO



MAPU: GREENIN II KAAVA:

$$\int_V d^3x \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right) = \int_{\partial V} d^2\sigma \, \vec{n}\cdot\left(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u\right)$$

$u = \frac{1}{r}$, $v = f$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{r} = \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r^3} = 0 \quad V(\varepsilon, R)\text{:SSÄ}$$

$$\Rightarrow \int_{V(\varepsilon,R)} d^3x \, \frac{1}{r} \nabla^2 f = \int_{\partial V(\varepsilon,R)} d^2\sigma \, \vec{n}\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)$$

$\partial V(\varepsilon,R)$ KOOSTUU PALLOPINNOISTA S_R $(\vec{n} = +\vec{e}_r)$ JA S_ε $(\vec{n} = -\vec{e}_r)$

$$\int_{S_R} d^2\sigma \, \vec{n}\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$(f \in S_3$ TAI $f \in D_3)$

$$J_\varepsilon = \int_{S_\varepsilon} d^2\sigma \, (-\vec{e}_r)\cdot\left(\frac{1}{r}\vec{\nabla}f - f\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)$$

NYT $\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$

$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta = \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\varphi = 0 \qquad \vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = 1$

$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r \qquad d^2\sigma = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

ELI
$$J_\varepsilon = -\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_{r=\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} f(\varepsilon,\theta,\varphi)\right)$$

$$= -\varepsilon \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\partial f}{\partial r}(\varepsilon,\theta,\varphi)$$

$$- \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \underbrace{f(\varepsilon,\theta,\varphi)}_{f(0) + [f(\varepsilon,\theta,\varphi) - f(0)]}$$

$$= -4\pi f(0) - \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\underbrace{\varepsilon \frac{\partial f}{\partial r}(\varepsilon,\theta,\varphi) + f(\varepsilon,\theta,\varphi) - f(0)}_{\to 0 \;\; \varepsilon \to 0} \right]$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -4\pi f(0)$$

SIIS: $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{V(\varepsilon,R)} d^3x \, \frac{1}{r}\nabla^2 f = -4\pi f(0)$,

JOTEN
$$\boxed{\nabla^2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\right) = \delta_3(\vec{r})}$$

3-UL. LAPLACEN OPERAATTORIN GREENIN FUNKTIO ON

$$G(\vec r_1, \vec r_2) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec r_1 - \vec r_2|} + h(\vec r_1, \vec r_2)$$

MISSÄ $\nabla^2_{r_1} h(\vec r_1, \vec r_2) = 0$. SOPIVALLA h:N VALINNALLA SAADAAN RATKAISU TOTEUTTAMAAN HALUTUT REUNAEHDOT

ESIM. MAXWELL I $\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$

$$\vec E = -\vec\nabla\varphi$$

$$\Rightarrow \nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

RATKAISU

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

MISSÄ REUNAEHDOKSI ON VALITTU

$$\varphi(\vec r) \to 0 \qquad |\vec r| \to \infty$$

FOURIER'N MUUNNOKSEN AVULLA :

($\vec r_1, \vec r_2 \in$ koko $\mathbb{R}^3$)

YRITE: $G(\vec r_1, \vec r_2) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, e^{i\vec k\cdot(\vec r_1 - \vec r_2)}\tilde G(\vec k)$

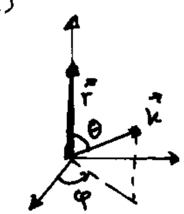
$$\nabla^2_{r_1} G = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,(-\vec k^2)\tilde G(\vec k)\, e^{i\vec k\cdot(\vec r_1-\vec r_2)}$$

$$\overset{P.O.?}{=} \delta_3(\vec r_1 - \vec r_2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\vec k\cdot(\vec r_1 - \vec r_2)}$$

$$\Rightarrow (-\vec k^2)\tilde G(\vec k) = 1/(2\pi)^{3/2}$$

(ERÄS) RATKAISU $\tilde G(\vec k) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\vec k^2}$

$$\Rightarrow G(\vec r_1, \vec r_2) = G(\vec r_1 - \vec r_2) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{e^{i\vec k\cdot(\vec r_1-\vec r_2)}}{\vec k^2}$$



MERK. $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$, $r = |\vec r|$

$$G(\vec r) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\,\frac{k^2}{k^2}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\, e^{ikr\cos\theta}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$z = \cos\theta$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dk\int_{-1}^1 dz\, e^{ikrz} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty dk\,\frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dk\,\frac{\sin kr}{k} \overset{x=kr}{=} -\frac{1}{2\pi^2 r}\underbrace{\int_0^\infty dx\,\frac{\sin x}{x}}_{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\Rightarrow G(\vec r_1 - \vec r_2) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec r_1 - \vec r_2|} \qquad \text{OK.}$$

(HOMOG. YHTÄLÖN RATKAISUT SAADAAN

$$(-\vec k^2)\tilde H(\vec k) = 0,$$

ESIM. $\tilde H(k_x, k_y, k_z) = A\,\delta'(k_x)\,\delta(k_y)\,\delta(k_z)$

$$\Rightarrow H(x, y, z) \propto x$$
)

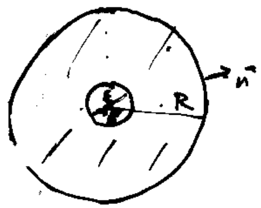
[illegible]

(2°) R^2 $\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ $\qquad d^2x = \rho\, d\rho\, d\varphi$

DISTRIBUUTIO $\log\rho$ $\qquad \log\rho\,[f] = \int d^2x \,\log\rho\, f(\rho,\varphi)$

$$\nabla^2\log\rho\,[f] = \int d^2x\,\log\rho\,\nabla^2 f = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \int_{V(\varepsilon,R)} d^2x\,\log\rho\,\nabla^2 f$$



$$\overset{\text{Green II}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int_{V(\varepsilon,R)} d^2x\, f\,\nabla^2\log\rho + \int_{\partial V(\varepsilon,R)} d\sigma\, \vec{n}\cdot\left(\log\rho\,\vec\nabla f - f\,\vec\nabla\log\rho\right)\right)$$

$$\vec\nabla\log\rho = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho \qquad \nabla^2\log\rho = -\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2} = 0 \quad \rho\neq 0$$

$\partial V(\varepsilon,R) = S_R + S_\varepsilon \qquad d\sigma = \rho\, d\varphi$

$$\int_{S_R} d\sigma\,\vec{n}\cdot(\,) \underset{\vec n = \vec e_\rho}{=} R\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\log R \left.\frac{\partial f}{\partial\rho}\right|_{\rho=R} - f\,\frac{1}{R}\right) \longrightarrow 0 \quad R\to\infty \quad \text{KUN } f\in S_2 \text{ TAI } D_2$$

$$\int_{S_\varepsilon} d\sigma\,\vec n\cdot(\,) \underset{\vec n = -\vec e_\rho}{=} -\varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\log\varepsilon \left.\frac{\partial f}{\partial\rho}\right|_{\rho=\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} f\right)$$

$$= -\varepsilon\log\varepsilon \int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\partial f}{\partial\rho}(\varepsilon,\varphi) + \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(\varepsilon,\varphi)$$

$$= 2\pi f(0) + \int_0^{2\pi} d\varphi\,\big(f(\varepsilon,\varphi) - f(0)\big) - \varepsilon\log\varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\partial f}{\partial\rho}(\varepsilon,\varphi)$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2\pi f(0)$$

SIIS $\quad \nabla^2\log\rho = 2\pi\,\delta_2(\vec r)$

JA $\quad G(\vec r_1,\vec r_2) = (2\pi)^{-1}\log|\vec r_1 - \vec r_2| + h(\vec r_1,\vec r_2)$

MISSÄ $\quad \nabla^2_{r_1} h(\vec r_1,\vec r_2) = 0$

AALTOYHTÄLÖN GREENIN FUNKTIO

RATKAISTAVA $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)u(\vec r,t) = f(\vec r,t)$

GREENIN FUNKTIO TOTEUTTAA

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla_{\vec r}^2\right) G(t,\vec r;t',\vec r') = \delta(t-t')\,\delta_3(\vec r - \vec r')$$

$$\Rightarrow \quad u(\vec r,t) = \int dt' \int d^3r'\, G(t,\vec r;t',\vec r')\, f(\vec r',t')$$

YRITE $\quad G = G(t-t', \vec r - \vec r') =$

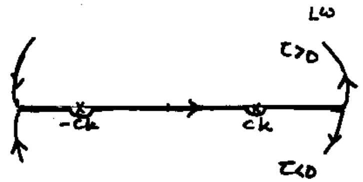
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k\, e^{i\omega(t-t') - i\vec k\cdot(\vec r - \vec r')}\,\tilde G(\omega,\vec k)$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec k^2\right)\tilde G(\omega,\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^2}$$

(ERÄS) RATKAISU : $\quad \tilde G(\omega,\vec k) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - \vec k^2}$

MERK. $\tau = t - t'$; $\vec R = \vec r - \vec r'$ $\quad k = |\vec k|$, $R = |\vec R|$

$$G(\tau,\vec R) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{-i\vec k\cdot\vec R}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\frac{e^{i\omega\tau}}{\left(\frac{\omega}{c}+k\right)\left(\frac{\omega}{c}-k\right)}$$



INTEGROIMISTIELLÄ KAKSI NAPAA . KIERRETÄÄN NE ALHAALTA

$\tau > 0$: VOIMME SULKEA TIEN ω-TASON YLÄOSASSA

$$c^2\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\frac{e^{i\omega\tau}}{(\omega+ck)(\omega-ck)} = c^2\, 2\pi i\left(\frac{e^{-ick\tau}}{-2ck} + \frac{e^{ick\tau}}{2ck}\right) = \frac{\pi i c}{k}\left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)$$

$\tau < 0$: SULJETAAN TIE ALATASOSSA $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cdots = 0$

ASKELFUNKTIO $\quad \Theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$

$$\bullet\ G(\tau, R) = -\frac{i\Theta(\tau)c}{16\pi^3}\int_0^\infty dk\, k\left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)\int_0^\pi d\theta \sin\theta\, e^{-ikR\cos\theta}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= -\frac{i\Theta(\tau)c}{8\pi^2 R}\frac{1}{(-i)}\int_0^\infty dk\left(e^{ick\tau} - e^{-ick\tau}\right)\left(e^{-ikR} - e^{ikR}\right)$$

$$= \frac{\Theta(\tau)c}{16\pi^2 R}\int_{-\infty}^{\infty} dk\left(e^{i(c\tau-R)k} - e^{i(c\tau+R)k} - e^{-i(c\tau+R)k} + e^{i(R-c\tau)k}\right)$$

$$= \frac{\Theta(\tau)c}{4\pi R}\left(\delta(c\tau - R) - \delta(c\tau + R)\right)$$

$$= \frac{\Theta(\tau)c}{4\pi R}\delta(c\tau - R) \qquad \neq 0$$ VAIN TULEVAISUUDEN VALOKARTIOLLA

TÄMÄ ON NS. <u>RETARDOITU</u> GREENIN FUNKTIO

$$u(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3r' \,\frac{c}{4\pi}\,\frac{\delta(c(t-t') - |\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} f(\vec{r}', t')$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \,\frac{f\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ "RETARDOITU AIKA"

$u(\vec{r}, t)$ RIIPPUU SIIS VAIN f:N ARVOISTA <u>AIKAISEMPINA</u> AJANHETKINÄ (KAUSAALISUUS !)

TOISET TAVAT KIERTÄÄ ω-TASON NAVAT ANTAVAT TOISIA EHTOJA TOTEUTTAVIA RATKAISUJA

2. KERTALUVUN LINEAARISET DY:T

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + P(z)\frac{df}{dz} + Q(z) f(z) = 0 \qquad (1)$$

$z \in D \subset \mathbb{C}$

(1) ON TOISEN KERTALUVUN YHTÄLÖ, SILLÄ ON KAKSI <u>LINEAARISESTI</u> <u>RIIPPUMATONTA</u> RATKAISUA

FUNKTIOT $f_1(z)$ JA $f_2(z)$ OVAT LINEAARISESTI RIIPPUMATTOMIA, JOS YHTÄLÖ

(2) $\qquad c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) = 0 \quad$ KAIKILLA $z \in D$

PÄTEE VAIN, JOS $c_1 = c_2 = 0$

JOS (2) PÄTEE, ON MYÖS

(3) $\qquad c_1 f_1'(z) + c_2 f_2'(z) = 0$

(2)&(3) YHTÄLÖRYHMÄ c_1, c_2:LLE. RATKAISU ON $c_1 = c_2 = 0$ JOS <u>WRONSKIN</u> <u>DETERMINANTTI</u>

$$W[f_1, f_2](z) = \begin{vmatrix} f_1(z) & f_2(z) \\ f_1'(z) & f_2'(z) \end{vmatrix} \neq 0$$

(JOSEF HOËNÉ DE WRONSKI 1778 - 1853)

FUNKTIOT f_1, f_2 OVAT LIN. RIIPPUMATTOMIA JOS

$$W[f_1,f_2](z) = f_1(z)f_2'(z) - f_2(z)f_1'(z) \neq 0$$

ESIM. $f_1(z) = \cos z$, $f_2(z) = \sin z$ (YHTÄLÖN $f''(z) = -f(z)$ KAKSI RATKAISUA)

$W = \cos z \cdot \cos z - \sin z\,(-\sin z) = \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \neq 0$

LIN. RTTOMIA

(JOS $W = 0$ LÖYTYY $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ S.E. $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \underset{\text{ESIM } c_2 \neq 0}{\Rightarrow} f_2(z) = -\frac{c_1}{c_2} f_1(z)$)

OLKOON NYT f_1, f_2 YHTÄLÖN (1) KAKSI RATKAISUA:

$$\frac{d^2 f_1}{dz^2} + P(z)\frac{df_1}{dz} + Q(z) f_1 = 0 \quad \Big| \cdot -f_2$$

$$\frac{d^2 f_2}{dz^2} + P(z)\frac{df_2}{dz} + Q(z) f_2 = 0 \quad \Big| \cdot f_1 \text{, LASKETAAN YHTEEN}$$

$$\Rightarrow f_1 f_2'' - f_2 f_1'' + P(f_1 f_2' - f_2 f_1') =$$

$$= \frac{d}{dz}(f_1 f_2' - f_2 f_1') + P(f_1 f_2' - f_2 f_1') = 0$$

ELI $\quad \frac{d}{dz} W[f_1,f_2](z) = -P(z)\, W[f_1,f_2](z)$

RATKAISTAAN

$$\frac{dW}{W} = -P\,dz \Rightarrow \log W(z) - \log W(z_0) = -\int_{z_0}^{z} dz'\, P(z')$$

$$\Rightarrow W(z) = W(z_0)\, e^{-\int_{z_0}^{z} dz' P(z')} \qquad (W)$$

TÄMÄ MAHDOLLISTAA TOISEN RATKAISUN LÖYTÄMISEN, JOS TUNNEMME TOISEN:

OLKOON $f_1(z)$ TUNNETTU RATKAISU, ETSITÄÄN TOINEN RIIPPUMATON RATKAISU $f_2(z)$

TARK. $f_1^2(z) \frac{d}{dz}\left(\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right) = f_1^2\left(\frac{f_2'}{f_1} - \frac{f_2 f_1'}{f_1^2}\right)$

$$= f_1 f_2' - f_2 f_1' = W[f_1, f_2]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left[\frac{f_2}{f_1}\right] = \frac{W[f_1,f_2]}{f_1^2}$$

INTEGROIDAAN MOLEMMAT PUOLET $\int_{z_0}^{z}$

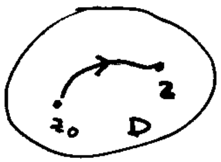
$$\frac{f_2(z)}{f_1(z)} - \frac{f_2(z_0)}{f_1(z_0)} = \int_{z_0}^{z} dz' \frac{W[f_1,f_2](z')}{f_1^2(z')} \overset{(W)}{=}$$

$$= W(z_0) \int_{z_0}^{z} dz' \frac{e^{-\int_{z_0}^{z'} dz'' P(z'')}}{f_1^2(z')}$$

$$\Rightarrow f_2(z) = \underbrace{C}_{\frac{f_2(z_0)}{f_1(z_0)}} \underbrace{f_1(z)}_{\text{TÄMÄ ON ILMEISESTI LIN. RIIPPUVA } f_1\text{:STÄ}} + \overset{\text{VAKIO}}{W(z_0)}\, f_1(z) \int_{z_0}^{z} dz' \frac{e^{-\int_{z_0}^{z'} dz'' P(z'')}}{f_1^2(z')}$$

RATKAISUKSI VOIDAAN OTTAA

$$\tilde{f}_2(z) = f_1(z)\int_{z_0}^{z} dz' \, \frac{e^{-\int_{z_0}^{z'} dz'' P(z'')}}{f_1^2(z')}$$



z_0 JA INTEGROIMISTIE VALITTAVA S.E. $f_1(z) \neq 0$

ESIM. $\quad f'' + f = 0 \qquad P(z) = 0$

$f_1(z) = \cos z$

$$\tilde{f}_2(z) = \cos z \int_{z_0}^{z} dz' \, \frac{1}{\cos^2 z'} = \cos z \left(\tan z - \tan z_0\right)$$

$$= \sin z - \underbrace{\tan z_0 \cos z}_{\propto f_1}$$

$\propto f_1$, VOIDAAN PUDOTTAA POIS (TAI VAL $z_0 = 0$, ESIM.)

EPÄHOMOG. YHTÄLÖ; GREENIN FUNKTIO

HALUAMME LÖYTÄÄ (ERÄÄN) RATKAISUN EPÄHOMOG. YHTÄLÖLLE

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + P(z)\frac{df}{dz} + Q(z) f = R(z) \qquad (E)$$

OLETAMME ETTÄ TUNNEMME HOMOGEENISEN YHTÄLÖN KAKSI LIN. RIIPPUMATONTA RATKAISUA $f_1(z)$, $f_2(z)$.
(ELI $f_i'' + P f_i' + Q f_i = 0 \quad i = 1, 2$)

YRITE: $\quad f(z) = A(z) f_1(z) + B(z) f_2(z)$

MISSÄ $\quad A'(z) f_1(z) + B'(z) f_2(z) = 0 \qquad (1)$

TÄLLÖIN $\quad f'(z) = \underbrace{A'(z) f_1(z) + B'(z) f_2(z)}_{=0 \ (1)} + A(z) f_1'(z) + B(z) f_2'(z)$

$$f''(z) = A'(z) f_1'(z) + B'(z) f_2'(z) + A(z) f_1''(z) + B(z) f_2''(z)$$

SIIS $\quad f'' + P f' + Q f = A(z)\underbrace{\left(f_1''(z) + P(z) f_1'(z) + Q(z) f_1(z)\right)}_{=0}$

$$+ B(z)\underbrace{\left(f_2''(z) + P(z) f_2'(z) + Q(z) f_2(z)\right)}_{=0}$$

$$+ A'(z) f_1'(z) + B'(z) f_2'(z) = R(z) \qquad (2)$$

(1) JA (2) VOIDAAN RATKAISTA $A'(z)$, $B'(z)$:N SUHTEEN

SAADAAN

$$A'(z) = -\frac{f_2(z)R(z)}{W[f_1,f_2](z)}$$

$$B'(z) = +\frac{f_1(z)R(z)}{W[f_1,f_2](z)}$$

INTEGROIMALLA SAADAAN

$$A(z) = A_0 - \int_{z_0}^{z} dz' \frac{f_2(z')R(z')}{W[f_1,f_2](z')}$$

$$B(z) = B_0 + \int_{z_0}^{z} dz' \frac{f_1(z')R(z')}{W[f_1,f_2](z')}$$

ELI LOPUKSI

$$f(z) = A_0 f_1(z) + B_0 f_2(z) + \int_{z_0}^{z} dz' \frac{f_1(z')f_2(z) - f_2(z')f_1(z)}{W[f_1,f_2](z')} R(z') \quad (3)$$

TULKINTA GREENIN FUNKTIONA:

OLETTAKAAMME $W[f_1,f_2](x) \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

VOIMME KIRJOITTAA RATKAISUN (3) MUOTOON

$$f(x) = H(x) + \int_{x_0}^{\infty} d\xi\, G(x,\xi)\, R(\xi)$$

MISSÄ $G(x,\xi) = \theta(x-\xi)\dfrac{f_1(\xi)f_2(x) - f_2(\xi)f_1(x)}{W[f_1,f_2](\xi)}$

OPERAATTORIN $\frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x)$ (ERÄS) GREENIN FUNKTIO

$H(x) = A_0 f_1(x) + B_0 f_2(x)$;

HOMOG. YHT. $\left(\frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x)\right)H(x) = 0$

RATKAISU

YHTÄLÖN ERIKOISPISTEET JA NIIDEN LUOKITTELU

$$\frac{d^2f}{dz^2} + P(z)\frac{df}{dz} + Q(z)f(z) = 0 \qquad z \in D$$

$z_0 \in D$. JOS LÖYTYY z_0:N YMPÄRISTÖ U (ESIM. KIEKKO $D_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$) S.E. SEKÄ $P(z)$ ETTÄ $Q(z)$ OVAT SÄÄNNÖLLISIÄ U:SSA z_0 ON YHTÄLÖN <u>SÄÄNNÖLLINEN PISTE</u>. (A-W: ORDINARY POINT)

JOS $P(z)$:LLÄ ON KORKEINTAAN 1. KERTALUVUN NAPA z_0:SSA $\left(P(z) = \frac{\alpha}{z-z_0} + P_{\text{sään.}}(z)\right)$ JA $Q(z)$:LLA KORKEINTAAN 2. KERTALUVUN NAPA z_0:SSA $\left(Q(z) = \frac{\beta}{(z-z_0)^2} + \frac{\gamma}{z-z_0} + Q_{\text{sään.}}(z)\right)$

z_0 ON <u>HEIKKO ERIKOISPISTE</u>

(A-W: REGULAR OR NONESSENTIAL SINGULAR POINT)

MUUTEN z_0 ON YHTÄLÖN <u>VAHVA ERIKOISPISTE</u> (A-W: IRREGULAR OR ESSENTIAL SINGULARITY)

ON MYÖS TUTKITTAVA MITEN YHTÄLÖ KÄYTTÄYTYY ∞:SSA

TUODAAN ∞ ORIGOON MUUTTUJANVAIHDOLLA

$$t = \frac{1}{z}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{dt}{dz}\frac{df}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{df}{dt} = -t^2\frac{df}{dt}$$

$$\frac{d^2f}{dz^2} = \frac{2}{z^3}\frac{df}{dt} - \frac{1}{z^2}\frac{dt}{dz}\frac{d^2f}{dt^2} = 2t^3\frac{df}{dt} + t^4\frac{d^2f}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dz^2} + P(z)\frac{df}{dz} + Q(z)f(z) =$$

$$= t^4\frac{d^2f}{dt^2} + 2t^3\frac{df}{dt} + P(\tfrac{1}{t})\left(-t^2\frac{df}{dt}\right) + Q(\tfrac{1}{t})f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dt^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}P(\tfrac{1}{t})\right)\frac{df}{dt} + \frac{1}{t^4}Q(\tfrac{1}{t})f = 0$$

∞ SÄÄNNÖLLINEN PISTE, JOS $\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2}$, $\frac{1}{t^4}Q(\frac{1}{t})$ SÄÄNNÖLLISIÄ $t=0$:SSA

HEIKKO ERIKOISPISTE, JOS $\frac{2}{t} - \frac{P(1/t)}{t^2}$, $\frac{1}{t^4}Q(1/t)$ ON KORK. 1. KERTALUVUN, 2. KERTALUVUN NAPA $t=0$:SSA

ESIM. BESSELIN YHTÄLÖ

$$f'' + \frac{1}{z}f' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)f = 0$$

$z=0$ HEIKKO ERIKOISPISTE

∞ VAHVA ERIKOISPISTE

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}P(\tfrac{1}{t}) = \frac{1}{t} \qquad \frac{1}{t^4}Q(\tfrac{1}{t}) = \frac{1}{t^4} - \frac{n^2}{t^2}$$

SARJARATKAISUMENET.

(FROBENIUS) (GEORG FROBENIUS 1849-1917)

$$\frac{d^2f}{dz^2} + P(z)\frac{df}{dz} + Q(z)f = 0$$

Olkoon $z = z_0$ säännöllinen tai heikko erikoispiste, kehitetään sen ympärille $z' = z - z_0$

$$P(z') = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z')^{n-1} = \frac{p_0}{z'} + p_1 + p_2 z' + \cdots$$

$$Q(z') = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z')^{n-2} = \frac{q_0}{z'^2} + \frac{q_1}{z'} + q_2 + q_3 z' + \cdots$$

(PUDOTETAAN PILKUT POIS JATKOSSA; ORIGO SIIS SIIRRETTY z_0:AAN)

$$\Rightarrow z^2\frac{d^2f}{dz^2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^{n+1}\right)\frac{df}{dz} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n\right)f = 0$$

YRITE: $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{k+r} \qquad f_0 \neq 0$$

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) f_k z^{k+r-1}$$

$$f''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) f_k z^{k+r-2}$$