FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 9

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 20.11. klo 12.00. The problem set is due on Tuesday Nov 20 by 12 noon.

1. (Nakahara 5.34) Olkoon $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ ja $f : M \to N$. Osoita että

   i) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

   ii) $f^*(\xi \wedge \omega) = (f^*\xi) \wedge (f^*\omega)$

   Let $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ and $f : M \to N$. Show i) and ii).

2. (Nakahara 6.2) Olkoon $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Osoita että Stokesin lauseen yleisestä muodosta seuraa että

$$\int_S (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{s} \ , \tag{1}$$

   missä $\vec{\omega} = (a, b, c)$ ja C on pinnan S reuna. Samaan tapaan, olkoon $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, osoita nyt että

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\psi} \ dV = \oint_S \vec{\psi} \cdot d\vec{S} \ , \tag{2}$$

   missä vektorin $\vec{\psi}$ komponentit ovat $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ ja S on alueen V reuna.

   Let $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Show that Stokes' theorem implies (1) where $\vec{\omega} = (a, b, c)$ and C is the boundary of a surface S. In a similar vein, for $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, show (2) where the components of the vector $\vec{\psi}$ are $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ and S is the boundary of a volume V.

3. (Nakahara 7.3) Olkoon kuvaus $f : T^2 \to R^3$ toruksen upotus euklidiseen avaruuteen (R^3, δ) (missä metriikka $\delta = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$), muotoa

$$f : (\theta, \phi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta) \ , \tag{3}$$

   missä $R > r$. Laske T^2:lle indusoituva metriikka $g = f^*\delta$.

   Let $f : T^2 \to R^3$ be an embedding of the torus into the Euclidean space (R^3, δ) (with the metric $\delta = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$), of the form (3) where $R > r$. Find the induced metric $g = f^*\delta$ on T^2.