FYMM/MMP III   Harjoitus/Problem Set 8

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 13.11. klo 12.00. The problem set is due on Tuesday Nov 13 by 12 noon.

1. Olkoon M 4-ulotteinen Minkowski-avaruus, koordinaatteina x^0, x^1, x^2, x^3. Määritellään lineaarinen operaattori $* : \Omega^r(M) \to \Omega^{4-r}(M)$,

$$\begin{aligned}
r &= 0; \;\; *1 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
r &= 1; \;\; *dx^i = -dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0 \;,\; *dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
r &= 2; \;\; *(dx^i \wedge dx^j) = dx^k \wedge dx^0 \;,\; *(dx^i \wedge dx^0) = -dx^j \wedge dx^k \\
r &= 3; \;\; *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = -dx^0 \;,\; *(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^0) = -dx^k \\
r &= 4; \;\; *(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1 \;,
\end{aligned}$$

missä (i,j,k) on $(1,2,3)$:n symmetrinen permutaatio. Määritellään 1-muoto $A = A_\mu dx^\mu$ missä $(A_\mu)_{\mu=0,\ldots,3} = (\phi, \vec{A})$ on sähkömagneettinen potentiaalikenttä. Sähkömagneettinen kenttävoimakkuus on silloin 2-muoto $F = dA$, jonka komponentit ovat

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

missä

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial x^0}\vec{A} \;;\; \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \;.$$

Määritellään vielä 1-muoto $J = J_\mu dx^\mu = \rho dx^0 + j_k dx^k$ joka kuvaa sähköistä varaustiheyttä ja virtaa.

i) Osoita että identiteetti $dF = d(dA) = 0$ vastaa Maxwellin yhtälöitä

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \;,\; \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \;. \quad (x^0 = t)$$

ii) Osoita että yhtälö $d * F = *J$ vastaa Maxwellin yhtälöitä

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \;,\; \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = \vec{j} \;. \;\; (t = x^0)$$

iii) Osoita että $0 = d(d * F) = d * J$ vastaa virran jatkuvuusyhtälöä

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \;.$$

(Huom. Saattaa olla painovirheitä.) Vihje: katso Nakahara, p. 186 ja sivujen 161-162 esimerkki 5.33.

2. Osoita että S^n on suunnistuva.

3. Olkoon $A \in \Omega^1(R^2 \backslash \{0\})$ seuraava:

$$A = \frac{hc}{2\pi e} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \ ,$$

missä h, c, e ovat reaalilukuja joista ei tarvitse nyt välittää. Osoita että A on suljettu. Laske

$$\Phi_0 \equiv \int_{S^1} A \ ,$$

missä S^1 on R^2:n yksikköympyrä. Fysikaalinen tulkinta: Φ_0 on äärettömän ohuen solenoidin, joka läpäisee tason kohtisuorasti origossa, magneettinen vuo. Tässä kenttä on sellainen että sitä vastaava vuo Φ_0 on ns. *vuokvantti*, joka esiintyy usein kiinteän olomuodon teoriassa (esim. kvasiaukot murtolukuisessa kvantti-Hall -ilmiössä).

Same in English:

1. Let M be the 4-dimensional Minkowski space, with coordinates x^0, x^1, x^2, x^3. Let's define a linear operator $* : \Omega^r(M) \to \Omega^{4-r}(M)$,

$$\begin{aligned}
r &= 0; \ \ *1 = -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
r &= 1; \ \ *dx^i = -dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0 \ , \ *dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
r &= 2; \ \ *(dx^i \wedge dx^j) = dx^k \wedge dx^0 \ , \ *(dx^i \wedge dx^0) = -dx^j \wedge dx^k \\
r &= 3; \ \ *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = -dx^0 \ , \ *(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^0) = -dx^k \\
r &= 4; \ \ *(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = 1 \ ,
\end{aligned}$$

where (i, j, k) is a symmetric permutation of $(1, 2, 3)$. We then define a 1-form $A = A_\mu dx^\mu$ where $(A_\mu)_{\mu=0,\ldots,3} = (\phi, \vec{A})$ is the electromagnetic potential. The electromagnetic field tensor is then the 2-form $F = dA$, with the components

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

where

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial x^0}\vec{A} \ ; \ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \ .$$

Finally, we define a 1-form $J = J_\mu dx^\mu = \rho dx^0 + j_k dx^k$ which corresponds to the electromagnetic current.

i) Show that the identity $dF = d(dA) = 0$ corresponds to the Maxwell equations

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \ , \ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \ . \quad (x^0 = t)$$

ii) Show that the equation $d * F = *J$ corresponds to the Maxwell equations

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \ , \ \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = \vec{j} \ . \ \ (t = x^0)$$

iii) Show that the identity $0 = d(d * F) = d * J$ corresponds to the continuity equation of the current

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \ .$$

Warning: Typos? Hint: see Nakahara, p. 186 and the example 5.33 on pages 161-162.

2. Show that S^n is orientable.

3. Let $A \in \Omega^1(R^2 \backslash \{0\})$ be the following 1-form:

$$A = \frac{hc}{2\pi e} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \ ,$$

where h, c, e are some real valued constants. Show that A is closed. Calculate

$$\Phi_0 \equiv \int_{S^1} A \ ,$$

where S^1 is the unit circle of R^2. Physical interpretation: Φ_0 is the magnetic flux of an infinitely thin solenoid perpendicular to the plane. Here the field is such that the corresponding flux Φ_0 is the so-called *flux quantum*, which often appears in condensed matter physics (e.g. quasiholes in fractional quantum Hall effect).