

# FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 7

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 6.11. klo 12.00. The problem set is due on Tue Nov 6 by 12 noon.

1. Olkoon differentioituva monisto  $M_1$  reaalilukujen joukko  $R$ , koordinaattina  $\phi_1(x) = x$ , ja  $M_2$  myöskin  $R$  mutta koordinaattina  $\phi_2(x) = x^3$ . Osoita että  $M_1$  ja  $M_2$  ovat diffeomorfiset. (Ts. etsi sopiva kuvaus  $f : M_1 \rightarrow M_2$  ja osoita sen olevan diffeomorfini.)
2. **Hamiltonin liikeyhtälöt esimerkkinä vektorikentän generoimasta virtauksesta.** Klassisesta mekaniikasta on (toivottavasti) tuttua se, että systeemiä jolla on  $N$  vapausastetta voidaan kuvata  $N$ :llä yleistetyllä koordinaatilla  $q_i$  ja kanonisella impulssilla  $p_i$ , missä  $i = 1, \dots, N$ . Yleistetyt koordinaatit ja kanoniset impulssit voidaan ajatella  $2N$ -ulotteisen moniston  $M$  koordinaateiksi,  $M$ :ää kutsutaan *faasiavaruudeksi*. Systeemin dynamiikkaa kuvaa Hamiltonin funktio  $H : M \rightarrow R$ ,  $H = H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$  ja sen liikeyhtälöt voidaan kirjoittaa ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmänä

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} .$$

Em. yhtälöitä kutsutaan Hamiltonin yhtälöiksi. Kirjoitetaan seuraavaksi yhtälöt eritavalla. Määritellään vektorikenttä  $X_H$  faasiavaruudessa  $M$ ,

$$X_H = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} .$$

Vektorikentän  $X_H$  integraalikäyrä  $x_H(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t), p_1(t), \dots, p_N(t))$  on käyrä monistolla  $M$ .

- i) Osoita että integraalikäyrää  $x_H(t)$  kuvaavat yhtälöt vastaavat Hamiltonin yhtälöitä.
  - ii) Olkoon  $M = R^2$ , eli  $N = 1$ , ja  $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ . Etsi  $X_H$  ja sen generoima virtaus  $\sigma(t, x_0)$  missä  $x_0 = (q_0, p_0) = (1, 0)$ . Piirrä kuva.
  - iii) Samoin kuin edellä mutta nyt  $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$  ja  $x_0 = (1, 1)$ .
  - iv) Nyt  $M = T^2$ , koordinaatteina  $q, p \in [0, 2\pi]$ , ja  $H = \cos(p)$ . Etsi integraalikäyrän yhtälö. Piirrä kuva integraalikäyristä  $T^2$ :lla.
3. Olkoon  $T$   $(p, q)$ -tensorikenttä,  $X$  ja  $Y$  vektorikenttiä. Osoita että Lie derivaatta toteuttaa  $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] T = \mathcal{L}_{[X, Y]} T$ , tässä riittää todistaa vain tapaukset
    - i)  $(p, q) = (1, 0)$ , eli  $T$  on vektorikenttä, ja
    - ii)  $(p, q) = (0, 1)$ , eli  $T$  on kotangenttivektorikenttä.

4. Osoita että ulkotulo toteuttaa ominaisuudet

i)  $\omega \wedge \omega = 0$ , kun  $\omega$ :n kertaluku on pariton

ii)  $\omega \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \omega$

iii)  $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$

missä kohtien ii),iii)  $\omega, \eta, \xi$  ovat  $q, r, s$ -muotoja.

Same in English:

1. Let a differentiable manifold  $M_1$  be the set of real numbers  $R$ , with the coordinate  $\phi_1(x) = x$ , and  $M_2$  also  $R$  but with the coordinate  $\phi_2(x) = x^3$ . Show that  $M_1$  and  $M_2$  are diffeomorphic. (I.e., find a suitable map  $f : M_1 \rightarrow M_2$  and show that it is a diffeomorphism.)

2. **Hamilton's Equations as an Example of a Flow Generated by Vector Field.** It should be familiar from Classical Mechanics that a system with  $N$  degrees of freedom can be described by generalized coordinates  $q_i$  and canonical momenta  $p_i$ , where  $i = 1, \dots, N$ . The generalized coordinates and canonical momenta can be thought as coordinates of a  $2N$ -dimensional manifold  $M$ , called the *phase space*. The dynamics of the system is given by the Hamiltonian,  $H : M \rightarrow R$ ,  $H = H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ ; its equations of motion can be written as a group of first order differential equations

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

These are called the Hamilton's equations. We will next reformulate them in a different way. Let's define a vector field  $X_H$  in the phase space  $M$ ,

$$X_H = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\}.$$

The vector field  $X_H$  gives rise to integral curves  $x_H(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t), p_1(t), \dots, p_N(t))$  on the manifold  $M$ .

i) Show that the equation defining the integral curves  $x_H(t)$  is equivalent to Hamilton's equations.

ii) Let  $M = R^2$ , i.e.  $N = 1$ , and  $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ . Find  $X_H$  and the generated flow  $\sigma(t, x_0)$  where  $x_0 = (q_0, p_0) = (1, 0)$ . Illustrate it by a figure.

iii) As before, but now with  $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$  ja  $x_0 = (1, 1)$ .

iv) Now  $M = T^2$ , with coordinates  $q, p \in [0, 2\pi]$ , and  $H = \cos(p)$ . Find the equation of the integral curve. Draw a figure of the curves on  $T^2$ .

3. Let  $T$  be a  $(p, q)$  tensor field,  $X$  and  $Y$  vector fields. Show that the Lie derivative satisfies  $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] T = \mathcal{L}_{[X, Y]} T$ , it is enough to consider the cases

**i)**  $(p, q) = (1, 0)$ , i.e.  $T$  is a vector field, and

**ii)**  $(p, q) = (0, 1)$ , i.e.  $T$  is a cotangent vector field.

4. Show that the exterior product satisfies the properties

**i)**  $\omega \wedge \omega = 0$ , when  $\omega$  is an odd form

**ii)**  $\omega \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \omega$

**iii)**  $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$

where in ii),iii)  $\omega, \eta, \xi$  are  $q, r, s$ -forms.