FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 5

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 16.10. klo 12.00. Problem set is due on Tue Oct 16 by noon.

1. Luennoilla osoitettiin että $SU(2)$:n matriisit voitiin kirjoittaa muodossa

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} ,$$

joten reaaliluvut $x_i, i = 0, \ldots, 3$ toteuttavat ehdon $x_0^2 + \cdots + x_3^2 = 1$. Siispä $SU(2)$:n koordinaatit kuuluvat yksikkopallon S^3 pinnalle.

i) Osoita että vastaavasti $SL(2, \mathbb{R})$ voidaan parametrisoida neljällä koordinaatilla $x_0, \ldots, x_3$ joiden välillä on sidosehto muotoa

$$c_0 x_0^2 + c_3 x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = c \ .$$

Etsi c_0, c_3, c. Vihje: yhtälö tulee kuvaamaan yhdestä neljästä mahdollisesta 3-ulotteisesta ns. yksikköpseudopallosta. Yleisemmin n-ulotteiset yksikköpseudopallot ovat vakiokaarevia n-ulotteisia hyperpintoja $\mathbb{R}^{n+1}$:ssä, joita kuvaa yhtälö

$$c_0 x_0^2 + c_n x_n^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = c \ ,$$

missä $c_0, c_n, c = \pm 1$. Mahdollisia vaihtoehtoja on neljä:

- $(c_0, c_n, c) = (-1, -1, -1)$: n-ulotteinen anti-de Sitter avaruus adS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, 1)$: n-ulotteinen de Sitter avaruus dS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, -1)$: n-ulotteinen hyperbolinen avaruus H_n
- $(c_0, c_n, c) = (1, 1, 1)$: n-ulotteinen pallo S^n.

ii) Etsi $SL(2, \mathbb{R})$:n konjugaattiluokat (vihje: niitä on kolmea eri tyyppiä) ja tulkitse ne mahdollisuuksien mukaan 2-ulotteisina pseudopalloina.

2. Osoita että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 \ , & x \leq 0 \\ -x + \frac{1}{2} \ , & x > 0 \end{cases}$$

ei ole jatkuva $\mathbb{R}$:n tavallisessa topologiassa.

3. Osoita että $\mathbb{R}^n$ varustettuna tavallisella topologialla on Hausdorffin avaruus. Olkoon X joukko jossa on määritelty metriikka d. Osoita että X varustettuna metrisellä topologialla on Hausdorffin avaruus.

4. Varustetaan $\mathbb{R}^2$ *diskreetillä metriikalla*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \neq y \ , \\ 0 & \text{jos } x = y \end{cases}$$

missä $x, y \in \mathbb{R}^2$, ja vastaavalla metrisellä topologialla τ_d. Onko $(\mathbb{R}^2, \tau_d)$ yhtenäinen? Todista vastauksesi.

5. Olkoon $f : M \to N$ homeomorfismi. Määritellään kuvaus $f_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, f(x_0))$ ehdolla $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Osoita että f_* on isomorfismi (eli $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(N, f(x_0))$).

Same in English:

1. In the lectures it was shown that the $SU(2)$ matrices can be written in the form

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} ,$$

where the real parameters $x_i, i = 0, \dots, 3$ satisfy the constraint $x_0^2 + \dots + x_3^2 = 1$. Thus the parameters of $SU(2)$ are coordinates of a unit sphere S^3.

i) Show that $SL(2, \mathbb{R})$ can be parameterized by four real numbers $x_0, \dots, x_3$ which satisfy a constraint of the form

$$c_0 x_0^2 + c_3 x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = c \ .$$

Find c_0, c_3, c. Hint: The equation will describe one of the four so-called unit pseudospheres. In general, n-dimensional unit pseudospheres are n-dimensional hypersurfaces of constant curvature in $\mathbb{R}^{n+1}$, defined by an equation of type

$$c_0 x_0^2 + c_n x_n^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = c \ ,$$

where $c_0, c_n, c = \pm 1$. There are four possible alternatives:

- $(c_0, c_n, c) = (-1, -1, -1)$: n-dimensional anti-de Sitter space adS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, 1)$: n-dimensional de Sitter space dS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, -1)$: n-dimensinal hyperbolic space H_n
- $(c_0, c_n, c) = (1, 1, 1)$: n-sphere S^n.

ii) Find the conjugacy classes of $SL(2, \mathbb{R})$ (hint: there are 3 different types of them) and interpret them as 2-dimensional pseudospheres, if possible.

2. Show that the map $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 \ , & x \leq 0 \\ -x + \frac{1}{2} \ , & x > 0 \end{cases}$$

is not continuous in the usual topology of $\mathbb{R}$.

3. Show that $\mathbb{R}^n$ with the usual topology is Hausdorff. Let X be a set with a metric d. Show that X with the metric topology is Hausdorff.

4. Consider $\mathbb{R}^2$ equipped with the *discrete metric*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x \neq y \ , \\ 0 & \text{jos } x = y \end{cases}$$

where $x, y \in \mathbb{R}^2$, and with the corresponding metric topology τ_d. Is $(\mathbb{R}^2, \tau_d)$ connected? Give a proof.

5. Let $f : M \to N$ be a homeomorphism. Define a map $f_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, f(x_0))$ such that $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Show that f_* is an isomorphism (*i.e.* $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(N, f(x_0))$)