FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 3

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 2.10. klo 12. Solutions are due in on Tuesday Oct 2 at noon.

1. Osoita että $O(n+1)/O(n) = S^n$, $U(n+1)/U(n) = S^{2n+1}$.

2. 2x2-kompleksimatriiseja

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kutsutaan **Paulin spin-matriiseiksi**.

i) Osoita että kuvaus R: $SU(2) \to SO(3,R)$, $U \mapsto R(U)$, missä

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} tr(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

($tr=$ matriisin jälki) on homomorfismi.

ii) Voidaan osoittaa että R on surjektio. Osoita että kuvauksena $SU(2)/Z_2$:sta $SO(3,R)$:ään R on isomorfismi.

Vihje: spin-matriisit toteuttavat

$$\sigma_k \sigma_l = 1_{2x2} \delta_{kl} + i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm} \sigma_m \; .$$

3. Osoita että kuvausten $f : X \to C$ (missä X on jokin joukko ja C on kompleksilukujen joukko) joukko $Map(X,C)$ on kompleksikertoiminen vektoriavaruus (funktioiden yhteenlaskun suhteen).

4. Ryhmä G vaikuttaa vasemmalta joukkoon X.

i) Osoita että asettamalla

$$\begin{aligned} D : G &\to Aut(Map(X,C)) \; ; \; g \mapsto D(g) \\ (D(g)f)(x) &\equiv f(g^{-1}x) \; , \end{aligned}$$

D määrittelee G:n esityksen vektoriavaruudessa $Map(X,C)$.

ii) Jos X on äärellinen joukko, osoita että saatu esitys on unitaarinen skalaaritulon

$$\langle f_1 | f_2 \rangle \equiv \sum_{x \in X} f_1^*(x) f_2(x)$$

suhteen.

iii) Mikä olisi sopiva skalaaritulo jos $X = R^n$? (Nyt X ei ole äärellinen, joten esityksen unitaarisuus pitäisi tarkastella erikseen, ei kuulu tehtävään.)

Same in English:

1. Show that $O(n+1)/O(n) = S^n$, $U(n+1)/U(n) = S^{2n+1}$.

2. The 2x2 complex matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are called **Pauli spin matrices**.

i) Show that the map R: $SU(2) \to SO(3,R),\ U \mapsto R(U)$, where

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} tr(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

($tr=$ matrix trace) is a group homomorphism.

ii) It can be shown that R is a surjection. Show that as a map $SU(2)/Z_2 \to SO(3,R)$ R is an isomorphism.

Hint: the spin matrices satisfy

$$\sigma_k \sigma_l = 1_{2x2}\delta_{kl} + i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm}\sigma_m \; .$$

3. Show that the set of maps $f : X \to C$ (where X is a set C the set of complex numbers) $Map(X, C)$ is a complex vector space (with respect to addition of functions).

4. A group G acts from left on a set X.

i) Show that the map

$$\begin{aligned} D : G &\to Aut(Map(X, C)) \; ; \; g \mapsto D(g) \\ (D(g)f)(x) &\equiv f(g^{-1}x) \; , \end{aligned}$$

defines a representation of G in the vector space $Map(X, C)$.

ii) If X is finite, show that the representation is unitary with respect to the scalar product

$$\langle f_1 | f_2 \rangle \equiv \sum_{x \in X} f_1^*(x) f_2(x) \; .$$

iii) If $X = R^n$, what would be a suitable scalar product? (Now X is infinite, so unitarity of the representation would need to be checked. You don't have to do it.)