FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 2

Vastaukset palautetaan viimeistään tiistaina 25.9. klo 12 Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon. Solutions are due in 12 noon on Tuesday Sep 25, in the box in the A-wing lobby on 2nd floor. Source of p. 3: www.jmilne.org/math/apocrypha.html

1. Tasasivuinen kolmio on symmetrinen heijastusten suhteen kun heijastusakselina on kolmion kärjen ja keskipisteen kautta kulkeva suora, sekä 120 asteen kiertojen suhteen (kun kiertoakselina on kolmion keskipiste, kierrot oletetaan suunnistetuksi vastapäivään). Olkoon e identtinen kuvaus, a 120 asteen kierto, ja b em. heijastus. Tarkastele ryhmää jonka generoivat e, a ja b kun tulona on kuvausten yhdistäminen. Mikä on ryhmän kertaluku? (Vihje: suurempi kuin kolme.) Konstruoi ryhmän kertotaulu.

2. Samaan tapaan kuin edellisessä tehtävässä, suorakulmio on symmetrinen identtisen kuvauksen e suhteen, 180 asteen kiertojen a suhteen, pystysuoran symmetria-akselin heijastusten b suhteen, ja vaakasuoran symmetria-akselin heijastusten c suhteen. Konstruoi suorakulmion symmetriaryhmän kertotaulu. Mikä ryhmä on kyseesssä?

3. Tässä tarina pohdittavaksi: *Finally, a story to keep in mind the next time you ask a totally stupid question at a major lecture. During a Bourbaki seminar on the status of the classification problem for simple finite groups, the speaker mentioned that it was not known whether a simple group (the monster) existed of a certain order. "Could there be more than one simple group of that order?"asked Weil from the audience. "Yes, there could"replied the speaker. "Well, could there be infinitely many?"asked Weil.*

   i) Miksi kysymys oli "täysin typerä"? Todista vastauksesi.

4. Tarkastellaan *Möbius-kuvausten* joukkoa

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,C) \right\} .$$

   i) Osoita että Mob on ryhmä, kun tulona on kuvausten yhdistäminen.

   ii) Osoita että kuvaus

$$f : SL(2,C) \to Mob \ ; \ f(A) = f_A$$

   on homomorfismi.

   iii) Etsi $SL(2,C)$:n aliryhmä H siten että tekijäryhmä $SL(2,C)/H$ on isomorfinen Mob:in kanssa. Perustele.

5. Etsi permutaatioryhmän S_4 konjugaattiluokat. (Vihje: katso Jones, luku 2.)

Same in English:

1. An equilateral triangle is symmetric under reflections, with the line passing through the center and one of the vertices as the reflection axis; and symmetric under 120 degree counterclockwise rotations (with the center as the fixed point). Let e be the identity map (do nothing), a a rotation by 120 degrees, and b the above mentioned reflection. Consider the group generated by e, a ja b with composition of symmetry operations as the multiplication rule. What is the order of the group? (Hint: greater than three.) Construct the multiplication table (Cayley table) of the group.

2. In a similar vein as in the previous excercise, a rectangle is symmetric under the identity map e, under 180 degree rotations a, under reflections b about the vertical symmetry axis, and reflections c about the horizontal symmetry axis. Construct the multiplication table for the symmetry group of the rectangle. Can you identify the group?

3. Consider the following story: *Finally, a story to keep in mind the next time you ask a totally stupid question at a major lecture. During a Bourbaki seminar on the status of the classification problem for simple finite groups, the speaker mentioned that it was not known whether a simple group (the monster) existed of a certain order. "Could there be more than one simple group of that order?"asked Weil from the audience. "Yes, there could"replied the speaker. "Well, could there be infinitely many?"asked Weil.*

   i) Why was this a "totally stupid question"? Give a satisfactory proof.

4. Consider the set of *Mobius transformations*

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,C) \right\} .$$

   i) Show that Mob is a group, with composition of mappings as the product.

   ii) Show that the mapping

$$f : SL(2,C) \to Mob \; ; \; f(A) = f_A$$

   is a homeomorphism.

   iii) Find a subgroup H of $SL(2,C)$ such that the quotient group $SL(2,C)/H$ is isomorphic to Mob. Explain why.

5. Find the conjugacy classes of the permutation group S_4. (Hint: see Jones, section 2.)