

FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 12

Tehtävät (nämä ovat kurssin viimeiset) palautetaan viimeistään tiistaina 11.12. klo 12.00. The problem set (this is the last one) is due on Tuesday Dec 11 by 12 noon.

1. Osoita että $[E_\alpha, E_\beta]$ on verrannollinen $E_{\alpha+\beta}$:een. Entä sitten jos $E_{\alpha+\beta}$ ei ole juuri? Show that $[E_\alpha, E_\beta]$ is proportional to $E_{\alpha+\beta}$. What if $E_{\alpha+\beta}$ is not a root?
2. Laske rakennevakiot / Calculate the structure constants f_{147} ja /and f_{458} SU(3):ssa / in SU(3).
3. Osoita että λ_2, λ_5 ja λ_5 generoivat SU(3):n alialgebran SU(2). Show that λ_2, λ_5 and λ_5 generate an SU(2) subalgebra of SU(3).
4. Olkoot X_a $N \times N$ matriiseja jotka toteuttavat kommutaatio säännöt

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c, \quad (1)$$

ja b_i^\dagger (b_i), $i = 1, \dots, N$ joukko luomisoperaattoreita (hävitysoperaattoreita) jotka toteuttavat kommutaatio säännöt

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}; [b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0. \quad (2)$$

Osoita että operaattorit

$$\chi_a \equiv \sum_{i,j=1}^N (X_a)_{ij} b_i^\dagger b_j \quad (3)$$

toteuttavat kommutaatiorelaatiot

$$[\chi_a, \chi_b] = if_{abc}\chi_c. \quad (4)$$

Suppose X_a are $N \times N$ matrices satisfying

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c, \quad (5)$$

and b_i^\dagger (b_i), $i = 1, \dots, N$ are a set of creation (annihilation) operators satisfying

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}; [b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0. \quad (6)$$

Show that the operators

$$\chi_a \equiv \sum_{i,j=1}^N (X_a)_{ij} b_i^\dagger b_j \quad (7)$$

satisfy

$$[\chi_a, \chi_b] = if_{abc}\chi_c. \quad (8)$$