

FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 10

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 27.11. klo 12.00. The problem set is due on Tuesday Nov 27 by 12 noon.

1. Olkoon metriikka toruksella T^2 jonka säteet ovat r ja $R > r$

$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R + r \cos \theta)^2 d\phi \otimes d\phi, \quad (1)$$

missä $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$. Laske Christoffelin symbolit

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \alpha\beta \end{array} \right\}$$

metriikalle (1).

Calculate the Christoffel symbols for the metric (1).

2. Johda geodeettiset yhtälöt toruksella metriikalle (1)

- i) variaatioperiaatteella käyttäen hyväksi vapaan massiivisen pistehiukkasen Lagrangen funktiota (käyrän pituuden vaikutusta, ks. luentojen kappale 5.9). Sijoita aluksi toruksen metriikka (sopivaan) Lagrangen tiheyteen.
- ii) sijoittamalla tehtävän 2 Christoffelin symbolit geodeettisen viivan yleiseen yhtälöön.

Kumpi menetelmä olisi mielestäsi helpompi, jos et olisi jo laskenut Christoffelin symboleita edellisessä tehtävässä? Tämän jälkeen,

iii) Ratkaise yhtälöt ja

iv) Hahmottele esimerkkejä geodeettisista viivoista toruksella.

Find the geodesic equation(s) on a torus with the metric (1), by

- i) using the variational principle and the action of a free massive point particle (the expression for the length of a curve, see section 5.9 of lecture notes). As a first step, substitute the torus metric into the (suitable) Lagrangian.
- ii) substituting the Christoffel symbols from problem 2 to the general geodesic equation.

Which method do you think would be easier, if you hadn't already calculated the Christoffel symbols in problem 2? Next,

iii) Solve the equations, and

iv) sketch some examples of geodesics on a torus.

3. **Homogeeninen ja isotrooppinen maailmankaikkeus.** Tätä kuvaa ns. Robertson-Walker metriikka

$$g = -dt \otimes dt + a^2(t) \left(\frac{dr \otimes dr}{1 - kr^2} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi) \right), \quad (2)$$

missä $k = -1, 0$, tai 1 . Laske R-W metriikalle Riemannin kaarevuustensorin ja Riccin tensorin komponentit, ja skalaarikaarevuus R .

The spatially homogenous and isotropic universe is described by the Robertson-Walker metric (2). Calculate the Riemann tensor, the Ricci tensor, and the scalar curvature.

4. Yksikköpallon S^2 metriikka on

$$g = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \quad (3)$$

Osoita että

$$\begin{aligned} L_1 &= -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ L_2 &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \\ L_3 &= \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (4)$$

ovat sen Killingin vektoreja. Laske kommutaattorit $[L_a, L_b]$, ja tunnista mikä symmetria on kyseessä.

The metric of the unit sphere S^2 is (3). Show that (4) are its Killing vectors. Calculate the commutators $[L_a, L_b]$ and identify the associated symmetry.