FYMM III / MMP III **sl. 2007 / Fall -07**

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 18.9. klo 12.00. Problem set is due on Tue Sep 18 by 12 noon.

1. Tarkastele seuraavia konstruktioita, tutki onko kyseessä puoliryhmä, monoidi, ryhmä tai ei mikään. Perustele.
   (a) Reaalilukujen joukko R, tulona potenssiin korottaminen: $x \cdot y \equiv x^y$; $x, y \in R$.
   (b) Positiivisten luonnollisten lukujen joukko $N_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ missä $m, n \in N_+$:n tulo on niiden suurin yhteinen tekijä: $m \cdot n \equiv gcd(m, n)$.
   (c) Nollasta eroavien rationaalilukujen joukko $Q \setminus \{0\}$, tulona tavallinen tulo: $(m/n) \cdot (p/q) = (mp/nq)$.
2. Osoita että $|S_N| = N!$
3. Tarkastele ryhmää $G = \{e, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, jonka alkiot ovat

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ;$$
$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

   ja tulona on matriisitulo. Osoita että tämä on isomorfinen erään tunnetun ryhmän kanssa. Konstruoi isomorfismi eksplisiittisesti.
4. (a) Kirjoita permutaatiot

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

   syklien avulla.
   (b) Kirjoita permutaatiot P_1, P_2 pelkkien 2-syklien avulla.
   (c) Ovatko permutaatiot P_1, P_2 parillisia vai parittomia?
5. Laske dim $SU(N)$.

Same in English:

1. Consider the following constructions, check each one whether it is a semigroup, monoid, group or none of them. Explain why.

(a) The set of real numbers R, with raising to power as the law of multiplication: $x \cdot y \equiv x^y;\ x, y \in R$.

(b) The set of positive natural numbers $N_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ with the greatest common divisor of $m, n \in N_+$ as the law of multiplication: $m \cdot n \equiv gcd(m, n)$.

(c) The set of nonzero rational numbers $Q \setminus \{0\}$, with the usual product as the law of multiplication: $(m/n) \cdot (p/q) = (mp/nq)$.

2. Show that $|S_N| = N!$

3. Consider the group $G = \{e, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, with the elements

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$
$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;\ x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

and the law of composition is matrix multiplication. Show that G is isomorphic to a known group and give an explicit construction of the isomorphism.

4. (a) Rewrite the permutations

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} ;\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

in the cycle notation.

(b) Rewrite the permutations P_1, P_2 using only 2-cycles.

(c) Are the permutations P_1, P_2 even or odd?

5. Calculate dim $SU(N)$.