

FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 9

Tehtävät palautetaan viimeistään *maanantaina* 27.11. klo 16.00. The problem set is due on *Monday* Nov 27 by 4 pm.

1. (Nakahara 5.34) Olkoon $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ ja $f : M \rightarrow N$. Osoita että

i) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

ii) $f^*(\xi \wedge \omega) = (f^*\xi) \wedge (f^*\omega)$

Let $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ and $f : M \rightarrow N$. Show i) and ii).

2. (Nakahara 6.2) Olkoon $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Osoita että Stokesin lauseen yleisestä muodosta seuraa että

$$\int_S (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{s}, \quad (1)$$

missä $\vec{\omega} = (a, b, c)$ ja C on pinnan S reuna. Samaan tapaan, olkoon $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, osoita nyt että

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\psi} dV = \oint_S \vec{\psi} \cdot d\vec{S}, \quad (2)$$

missä vektorin $\vec{\psi}$ komponentit ovat $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ ja S on alueen V reuna.

Let $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Show that Stokes' theorem implies (1) where $\vec{\omega} = (a, b, c)$ and C is the boundary of a surface S . In a similar vein, for $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, show (2) where the components of the vector $\vec{\psi}$ are $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ and S is the boundary of a volume V .

3. (Nakahara 7.3) Olkoon kuvaus $f : T^2 \rightarrow R^3$ toruksen upotus euklidiseen avaruuteen (R^3, δ) (missä metriikka $\delta = \text{diag}(1, 1, 1)$), muotoa

$$f : (\theta, \phi) \mapsto ((R + r \cos \theta) \cos \phi, (R + r \cos \theta) \sin \phi, r \sin \theta), \quad (3)$$

missä $R > r$. Laske T^2 :lle indusoituva metriikka $g = f^*\delta$.

Let $f : T^2 \rightarrow R^3$ be an embedding of the torus into the Euclidean space (R^3, δ) (with the metric $\delta = \text{diag}(1, 1, 1)$), of the form (3) where $R > r$. Find the induced metric $g = f^*\delta$ on T^2 .