

# FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 8

Tehtävät palautetaan viimeistään \*maanantaina\* 20.11. klo 16.00. The problem set is due on \*Monday\* Nov 20 by 4 pm.

1. Olkoon  $M$  4-ulotteinen Minkowski-avaruus, koordinaatteina  $x^0, x^1, x^2, x^3$ . Määritellään lineaarinen operaattori  $*$  :  $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{4-r}(M)$ ,

$$\begin{aligned} r &= 0; & *1 &= -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ r &= 1; & *dx^i &= -dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0, \quad *dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ r &= 2; & *(dx^i \wedge dx^j) &= dx^k \wedge dx^0, \quad *(dx^i \wedge dx^0) = -dx^j \wedge dx^k \\ r &= 3; & *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= -dx^0, \quad *(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^0) = -dx^k \\ r &= 4; & *(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= 1, \end{aligned}$$

missä  $(i, j, k)$  on  $(1, 2, 3)$ :n symmetrinen permutaatio. Määritellään 1-muoto  $A = A_\mu dx^\mu$  missä  $(A_\mu)_{\mu=0,\dots,3} = (\phi, \vec{A})$  on sähkömagneettinen potentiaalienttä. Sähkömagneettinen kenttävoimakkuus on silloin 2-muoto  $F = dA$ , jonka komponentit ovat

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

missä

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial x^0}\vec{A}; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Määritellään vielä 1-muoto  $J = J_\mu dx^\mu = \rho dx^0 + j_k dx^k$  joka kuvaa sähköistä varaustiheyttä ja virtaa.

- i) Osoita että identiteetti  $dF = d(dA) = 0$  vastaa Maxwellin yhtälöitä

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0. \quad (x^0 = t)$$

- ii) Osoita että yhtälö  $d * F = *J$  vastaa Maxwellin yhtälöitä

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}. \quad (t = x^0)$$

- iii) Osoita että  $0 = d(d * F) = d * J$  vastaa virran jatkuvuusyhtälöä

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

(Huom. Saattaa olla painovirheitä.) Vihje: katso Nakahara, p. 186 ja sivujen 161-162 esimerkki 5.33.

2. Osoita että  $S^n$  on suunnistuva.

3. Olkoon  $A \in \Omega^1(R^2 \setminus \{0\})$  seuraava:

$$A = \frac{hc}{2\pi e} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} ,$$

missä  $h, c, e$  ovat reaalityyppisiä lukuja joista ei tarvitse nyt välittää. Osoita että  $A$  on suljettu. Laske

$$\Phi_0 \equiv \int_{S^1} A ,$$

missä  $S^1$  on  $R^2$ :n yksikköympyrä. Fysikaalinen tulkinta:  $\Phi_0$  on äärettömän ohuen solenoidin, joka läpäisee tason kohtisuorasti origossa, magneettinen vuo. Tässä kenttä on sellainen että sitä vastaava vuo  $\Phi_0$  on ns. *vuokvantti*, joka esiintyy usein kiinteän olomuodon teoriassa (esim. kvasiaukot murtolukuisessa kvantti-Hall -ilmiössä).

Same in English:

1. Let  $M$  be the 4-dimensional Minkowski space, with coordinates  $x^0, x^1, x^2, x^3$ . Let's define a linear operator  $*$  :  $\Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{4-r}(M)$ ,

$$\begin{aligned} r &= 0; & *1 &= -dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ r &= 1; & *dx^i &= -dx^j \wedge dx^k \wedge dx^0, \quad *dx^0 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ r &= 2; & *(dx^i \wedge dx^j) &= dx^k \wedge dx^0, \quad *(dx^i \wedge dx^0) = -dx^j \wedge dx^k \\ r &= 3; & *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= -dx^0, \quad *(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^0) = -dx^k \\ r &= 4; & *(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= 1, \end{aligned}$$

where  $(i, j, k)$  is a symmetric permutation of  $(1, 2, 3)$ . We then define a 1-form  $A = A_\mu dx^\mu$  where  $(A_\mu)_{\mu=0, \dots, 3} = (\phi, \vec{A})$  is the electromagnetic potential. The electromagnetic field tensor is then the 2-form  $F = dA$ , with the components

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

where

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial x^0} \vec{A}; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} .$$

Finally, we define a 1-form  $J = J_\mu dx^\mu = \rho dx^0 + j_k dx^k$  which corresponds to the electromagnetic current.

i) Show that the identity  $dF = d(dA) = 0$  corresponds to the Maxwell equations

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0. \quad (x^0 = t)$$

ii) Show that the equation  $d * F = *J$  corresponds to the Maxwell equations

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = \vec{j}. \quad (t = x^0)$$

iii) Show that the identity  $0 = d(d * F) = d * J$  corresponds to the continuity equation of the current

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Warning: Typos? Hint: see Nakahara, p. 186 and the example 5.33 on pages 161-162.

2. Show that  $S^n$  is orientable.

3. Let  $A \in \Omega^1(R^2 \setminus \{0\})$  be the following 1-form:

$$A = \frac{hc}{2\pi e} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

where  $h, c, e$  are some real valued constants. Show that  $A$  is closed. Calculate

$$\Phi_0 \equiv \int_{S^1} A,$$

where  $S^1$  is the unit circle of  $R^2$ . Physical interpretation:  $\Phi_0$  is the magnetic flux of an infinitely thin solenoid perpendicular to the plane. Here the field is such that the corresponding flux  $\Phi_0$  is the so-called *flux quantum*, which often appears in condensed matter physics (e.g. quasiholes in fractional quantum Hall effect).