FYMM/MMP III   Harjoitus/Problem Set 7

Tehtävät palautetaan viimeistään *maanantaina* 13.11. klo 16.00. The problem set is due on *Mon* Nov 13 by 4pm.

1. Johda muunnoskaava tensorin

$$T = T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes dx^{\nu_3}$$

komponenteille koordinaattimuunnoksessa $x \to y$.

2. **Hamiltonin liikeyhtälöt esimerkkinä vektorikentän generoimasta virtauksesta**. Klassisesta mekaniikasta on (toivottavasti) tuttua se, että systeemiä jolla on N vapausastetta voidaan kuvata N:llä yleistetyllä koordinaatilla q_i ja kanonisella impulssilla p_i, missä $i = 1, \ldots, N$. Yleistetyt koordinaatit ja kanoniset impulssit voidaan ajatella $2N$-ulotteisen moniston M koordinaateiksi, M:ää kutsutaan *faasiavaruudeksi*. Systeemin dynamiikkaa kuvaa Hamiltonin funktio $H : M \to R$, $H = H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$ ja sen liikeyhtälöt voidaan kirjoittaa ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmänä

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; .$$

Em. yhtälöitä kutsutaan Hamiltonin yhtälöiksi. Kirjoitetaan seuraavaksi yhtälöt eri tavalla. Määritellään vektorikenttä X_H faasiavaruudessa M,

$$X_H = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} \; .$$

Vektorikentän X_H integraalikäyrä $x_H(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t), p_1(t), \ldots, p_N(t))$ on käyrä monistolla M.

i) Osoita että integraalikäyrää $x_H(t)$ kuvaavat yhtälöt vastaavat Hamiltonin yhtälöitä.

ii) Olkoon $M = R^2$, eli $N = 1$, ja $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Etsi X_H ja sen generoima virtaus $\sigma(t, x_0)$ missä $x_0 = (q_0, p_0) = (1, 0)$. Piirrä kuva.

iii) Samoin kuin edellä mutta nyt $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$ ja $x_0 = (1, 1)$.

iv) Nyt $M = T^2$, koordinaatteina $q, p \in [0, 2\pi]$, ja $H = \cos(p)$. Etsi integraalikäyrän yhtälö. Piirrä kuva integraalikäyristä T^2:lla.

3. Olkoon T (p, q)-tensorikenttä, X ja Y vektorikenttiä. Osoita että Lie derivaatta toteuttaa $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \, T = \mathcal{L}_{[X,Y]} \, T$, tässä riittää todistaa vain tapaukset

i) $(p, q) = (1, 0)$, eli T on vektorikenttä, ja

ii) $(p,q) = (0,1)$, eli T on kotangenttivektorikenttä.

4. Osoita että ulkotulo toteuttaa ominaisuudet

   i) $\omega \wedge \omega = 0$, kun ω:n kertaluku on pariton

   ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \omega$

   iii) $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$

   missä kohtien ii),iii) ω, η, ξ ovat q, r, s-muotoja.

Same in English:

1. Derive the transformation rule for the components of the tensor

$$T = T^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2\nu_3} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes dx^{\nu_3}$$

   in the coordinate transformation $x \to y$.

2. **Hamilton's Equations as an Example of a Flow Generated by Vector Field**. It should be familiar from Classical Mechanics that a system with N degrees of freedom can be described by generalized coordinates q_i and canonical momenta p_i, where $i = 1, \ldots, N$. The generalized coordinates and canonical momenta can be thought as coordinates of a $2N$-dimensional manifold M, called the *phase space*. The dynamics of the system is given by the Hamiltonian, $H : M \to R$, $H = H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$; its equations of motion can be written as a group of first order differential equations

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; .$$

   These are called the Hamilton's equations. We will next reformulate them in a different way. Let's define a vector field X_H in the phase space M,

$$X_H = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} \; .$$

   The vector field X_H gives rise to integral curves $x_H(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t), p_1(t), \ldots, p_N(t))$ on the manifold M.

   i) Show that the equation defining the integral curves $x_H(t)$ is equivalent to Hamilton's equations.

   ii) Let $M = R^2$, i.e. $N = 1$, and $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Find X_H and the generated flow $\sigma(t, x_0)$ where $x_0 = (q_0, p_0) = (1, 0)$. Illustrate it by a figure.

   iii) As before, but now with $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$ ja $x_0 = (1, 1)$.

iv) Now $M = T^2$, with coordinates $q, p \in [0, 2\pi]$, and $H = \cos(p)$. Find the equation of the integral curve. Draw a figure of the curves on T^2.

3. Let T be a (p, q) tensor field, X and Y vector fields. Show that the Lie derivative satisfies $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\, T = \mathcal{L}_{[X,Y]}\, T$, it is enough to consider the cases

   i) $(p, q) = (1, 0)$, i.e. T is a vector field, and

   ii) $(p, q) = (0, 1)$, i.e. T is a cotangent vector field.

4. Show that the exterior product satisfies the properties

   i) $\omega \wedge \omega = 0$, when ω is an odd form

   ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \omega$

   iii) $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$

   where in ii),iii) ω, η, ξ are q, r, s-forms.