FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 6

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 7.11. klo 10.00. Problem set is due on Tue Nov 7 by 10 am.

1. **Esimerkkejä homotopiaryhmistä**. Olkoon

   i) $M = R^3 \backslash \{\text{piste}\}$. Laske $\pi_1(M)$ ja $\pi_2(M)$.

   ii) $M = R^3 \backslash \{\text{suora}\}$. Laske $\pi_1(M)$.

   iii) $M = R^2 \backslash \{x_1, x_2\}$ missä $x_1 \neq x_2$ ovat 2 eri pistettä R^2:ssa. Laske $\pi_1(M)$. **Vihje:** Nakahara, luku 4.4.1.

2. Etsi kartasto ja koordinaatit torukselle $T^2 = S^1 \times S^1$.

3. Olkoon differentioituva monisto M_1 reaalilukujen joukko R, koordinaattina $\phi_1(x) = x$, ja M_2 myöskin R mutta koordinaattina $\phi_2(x) = x^3$. Osoita että M_1 ja M_2 ovat diffeomorfiset. (Ts. etsi sopiva kuvaus $f : M_1 \to M_2$ ja osoita sen olevan diffeomorfismi.)

4. Etsi projektiiviselle avaruudelle RP^n kartasto, koordinaatit ja transitiofunktiot.

5. Olkoon X R^3:n vektorikenttä

$$X = X^i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \ .$$

   Määritellään (1,1)-tensorikenttä S_{st},

$$S_{st} = S^i_j \ \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \ ,$$

   jonka komponentit S^i_j ovat

$$S^i_j = \frac{1}{2}\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial X^j}{\partial x^i} - \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial X^k}{\partial x^k}\right) \delta^i_j \ .$$

   Laske komponentit S^i_j kun $X^1 = 0, X^2 = k \cdot x^1, X^3 = 0$, k on vakio (reaaliluku). Kommentti: S_{st} on elastiseen kappaleeseen kohdistuvaa halkaisevaa jännitystä (shearing strain) kuvaava jännitystensori. Tehtävässä kappale on elastinen palkki, johon kohdistuu pituussuunnassa halkaiseva jännitys. Katso K. Symon, *Mechanics*, s. 237, 437-8.

Same in English:

1. **Examples of Homotopy Groups**. Let

i) $M = R^3 \backslash \{\text{point}\}$. Calculate $\pi_1(M)$ and $\pi_2(M)$.

ii) $M = R^3 \backslash \{\text{line}\}$. Calculate $\pi_1(M)$.

iii) $M = R^2 \backslash \{x_1, x_2\}$ where $x_1 \neq x_2$ are 2 different points in R^2. Calculate $\pi_1(M)$.
Hint: Nakahara, section 4.4.1.

2. Find an atlas and coordinates for a torus $T^2 = S^1 \times S^1$.

3. Let a differentiable manifold M_1 be the set of real numbers R, with the coordinate $\phi_1(x) = x$, and M_2 also R but with the coordinate $\phi_2(x) = x^3$. Show that M_1 and M_2 are diffeomorphic. (I.e., find a suitable map $f : M_1 \to M_2$ and show that it is a diffeomorphism.)

4. Find an atlas, coordinates, and transition functions for the projective space RP^n.

5. Let X be a vector field in R^3,

$$X = X^i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \ .$$

We then define a (1,1) tensor field S_{st},

$$S_{st} = S^i_j \ \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \ ,$$

with the components S^i_j given by

$$S^i_j = \frac{1}{2} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} - \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \right) \delta^i_j \ .$$

Calculate the components S^i_j when $X^1 = 0, X^2 = k \cdot x^1, X^3 = 0$, k is a (real valued) constant. Comment: S_{st} is a shear tensor, which describes the shearing strain on an elastic body. In this exercise the body is an elastic beam, subject to a shearing force parallel to the beam. See K. Symon, *Mechanics*, s. 237, 437-8.