FYMM/MMP III Harjoitus/Problem Set 3

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 10.10. klo 10 Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon. Solutions are due in 10 am on Tuesday Oct 10, in the box in the A-wing lobby on 2nd floor.

1. **Dihedriset ryhmät** D_n ovat suunnistamattomien n-polygonien symmetriaryhmiä (rotaatiot vastapäivään ja heijastukset). Lisää voit lukea Jonesin 1. luvusta. Tarkastellaan ryhmää D_4, eli neliön symmetriamuunnoksia. Ryhmän generoivat identiteettikuvaus e, 90 asteen rotaatio a origon suhteen vastapäivään, sekä heijastus c origon ja yhden sivun keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Etsi D_4:n konjugaattiluokat

   i) tulkitsemalla D_4:n elementit neliön kärkien permutaatioina (eli permutaatioryhmän S_4 elementteinä).

   ii) käyttämällä geometrista tulkintaa.

2. Osoita että $O(n+1)/O(n) = S^n$, $U(n+1)/U(n) = S^{2n+1}$.

3. 2x2-kompleksimatriiseja

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   kutsutaan **Paulin spin-matriiseiksi**.

   i) Osoita että kuvaus R: $SU(2) \to SO(3,R)$, $U \mapsto R(U)$, missä

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} tr(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

   ($tr=$ matriisin jälki) on homomorfismi.

   ii) Voidaan osoittaa että R on surjektio. Osoita että kuvauksena $SU(2)/Z_2$:sta $SO(3,R)$:ään R on isomorfismi.

   Vihje: spin-matriisit toteuttavat

$$\sigma_k \sigma_l = 1_{2x2} \delta_{kl} + i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm} \sigma_m \; .$$

4. Osoita että kuvausten $f : X \to C$ (missä X on jokin joukko ja C on kompleksilukujen joukko) joukko $Map(X, C)$ on kompleksikertoiminen vektoriavaruus (funktioiden yhteenlaskun suhteen).

5. Ryhmä G vaikuttaa vasemmalta joukkoon X.

   i) Osoita että asettamalla

$$\begin{aligned} D : G &\rightarrow Aut(Map(X,C)) \;;\; g \mapsto D(g) \\ (D(g)f)(x) &\equiv f(g^{-1}x) \;, \end{aligned}$$

   D määrittelee G:n esityksen vektoriavaruudessa $Map(X,C)$.

   ii) Jos X on äärellinen joukko, osoita että saatu esitys on unitaarinen skalaaritulon

$$\langle f_1|f_2\rangle \equiv \sum_{x\in X} f_1^*(x)f_2(x)$$

   suhteen.

   iii) Mikä olisi sopiva skalaaritulo jos $X = R^n$? (Nyt X ei ole äärellinen, joten esityksen unitaarisuus pitäisi tarkastella erikseen, ei kuulu tehtävään.)

6. $SU(1,1)$ on ryhmä jonka alkiot $\tilde{g}$ ovat 2x2-kompleksimatriiseja

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} z & w \\ w^* & z^* \end{pmatrix} \;,$$

   missä $|z|^2 - |w|^2 = 1$ ja $SL(2,R)$:n alkiot g ovat 2x2-reaalimatriiseja

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;,$$

   missä $ad - bc = 1$. Osoita että kuvaus μ,

$$\mu(g) = NgN^{-1}$$

   missä

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \;,$$

   on isomorfismi $\mu : SL(2,R) \rightarrow SU(1,1)$.

Same in English:

1. **Dihedral groups** D_n are symmetry groups of regular polygons with n undirected sides (with counterclockwise rotations and reflections as the symmetry operations). You can read more about them from section 1 of Jones. Consider the group D_4, symmetry transformations of a square. It is generated by the identity map e, 90 degree counterclockwise rotations a about the origin, and reflections c about a symmetry axis through the origin and the center point of one of the sides. Find the conjugacy classes of D_4

i) by considering the elements of D_4:n as permutations $\in S_4$ of the vertices of the square.

ii) by geometrical considerations.

2. Show that $O(n+1)/O(n) = S^n$, $U(n+1)/U(n) = S^{2n+1}$.

3. The 2x2 complex matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are called **Pauli spin matrices**.

i) Show that the map R: $SU(2) \rightarrow SO(3,R)$, $U \mapsto R(U)$, where

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} tr(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

($tr=$ matrix trace) is a group homomorphism.

ii) It can be shown that R is a surjection. Show that as a map $SU(2)/Z_2 \rightarrow SO(3,R)$ R is an isomorphism.

Hint: the spin matrices satisfy

$$\sigma_k \sigma_l = 1_{2x2} \delta_{kl} + i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm} \sigma_m \; .$$

4. Show that the set of maps $f : X \rightarrow C$ (where X is a set C the set of complex numbers) $Map(X,C)$ is a complex vector space (with respect to addition of functions).

5. A group G acts from left on a set X.

i) Show that the map

$$\begin{aligned} D : G &\rightarrow Aut(Map(X,C)) \; ; \; g \mapsto D(g) \\ (D(g)f)(x) &\equiv f(g^{-1}x) \; , \end{aligned}$$

defines a representation of G in the vector space $Map(X,C)$.

ii) If X is finite, show that the representation is unitary with respect to the scalar product

$$\langle f_1 | f_2 \rangle \equiv \sum_{x \in X} f_1^*(x) f_2(x) \; .$$

iii) If $X = R^n$, what would be a suitable scalar product? (Now X is infinite, so unitarity of the representation would need to be checked. You don't have to do it.)

6. $SU(1,1)$ is a group where the elements $\tilde{g}$ are 2x2 complex matrices

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} z & w \\ w^* & z^* \end{pmatrix} ,$$

with $|z|^2 - |w|^2 = 1$. The elements of $SL(2,R)$ are 2x2 real matrices

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

with $ad - bc = 1$. Show that the map μ,

$$\mu(g) = NgN^{-1}$$

where

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} ,$$

is an isomorphism $\mu : SL(2,R) \rightarrow SU(1,1)$.