FYMM/MMP III   Harjoitus/Problem Set 2

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 3.10. klo 10 Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon. Solutions are due in 10 am on Tuesday Oct 3, in the box in the A-wing lobby on 2nd floor. **Vihje/Hint** Hyödylliset sivut / useful web pages mathworld.wolfram.com, wikipedia.org .

1. Olkoon $n \in N_+$. Kokonaisluvut a ja b ovat *kongruentteja modulo* n, merkitään $a \equiv b\ (mod\ n)$, jos $\exists r \in Z$ siten että $a - b = rn$. Osoita että lukujen kongruenssi on ekvivalenssirelaatio. Ekvivalenssiluokkia $[a]$ kutsutaan *jäännösluokiksi*. Osoita että jäännösluokat muodostavat ryhmän kun kertolasku määritellään $[a] \cdot [b] = [a + b]$. Mikä on ryhmän kertaluku? Onko se isomorfinen jonkin tuntemasi ryhmän kanssa? Jos, niin minkä?

2. Jos kokonaislukujen a ja b suurin yhteinen tekijä on 1 (merkitään $syt(a, b) = 1$), sanomme että a ja b ovat *suhteellisia alkulukuja*. Olkoon sitten $n \in N_+$, ja A_n kaikkien niiden kokonaislukujen joukko jotka ovat suhteellisia alkulukuja n:n kanssa, $A_n = \{a \in Z | syt(a, n) = 1\}$. Tarkastellaan seuraavaksi A_n:n alkioita jotka ovat keskenään kongruentteja modulo n: $a, b \in A_n$, $a \equiv b\ (mod\ n)$, ja muodostetaan näiden jäännösluokista $[a]$ joukko $M_n = \{[a] | a \in A_n\}$. Osoita että M_n on ryhmä kun kertolasku määritellään $[a] \cdot [b] = [ab]$, eli toisin kuin edellisessä tehtävässä. Ryhmän kertaluvusta $|M_n|$ käytetään myös merkintää $\phi(n)$ ja se tunnetaan nimellä *(Eulerin) totienttifunktio*. Mikä on $\phi(p)$ kun p on alkuluku? Mikä on $\phi(24)$? (Katso myös englanninkielinen versio tästä tehtävästä.)

3. Laske $dim\ SU(n)$.

4. Tarkastellaan *Möbius-kuvausten* joukkoa

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C) \right\} .$$

   i) Osoita että Mob on ryhmä, kun tulona on kuvausten yhdistäminen.

   ii) Osoita että kuvaus
   $$f : SL(2, C) \to Mob\ ;\ f(A) = f_A$$
   on homomorfismi.

   iii) Etsi $SL(2, C)$:n aliryhmä H siten että tekijäryhmä $SL(2, C)/H$ on isomorfinen Mob:in kanssa. Perustele.

5. Etsi permutaatioryhmän S_4 konjugaattiluokat. (Vihje: katso Jones, luku 2.)

Same in English:

1. Let $n \in N_+$. We say that integers a, b are *congruent modulo* n, $a \equiv b \ (mod \ n)$, if $\exists r \in Z$ such that $a - b = rn$. Show that congruence is an equivalence relation. The equivalence classes $[a]$ are called *congruence classes* or *residue classes*. Show that the set of residue classes forms a group, if we define multiplication by $[a] \cdot [b] = [a + b]$. What is the order of this group? Is it isomorphic to any group that you already know? If so, which one?

2. If the greatest common divisor of integers a, b is equal to 1 (denoted $gcd(a, b) = 1$), we say that a and b are *relatively prime* or *coprime*. Let $n \in N_+$, and let A_n be the set of all integers that are relatively prime with n: $A_n = \{a \in Z | gcd(a, n) = 1\}$. Consider then elements of A_n that are congruent modulo n, their residue classes $[a]$ form a set $M_n = \{[a] | a \in A_n\}$. Show that M_n is a group, when multiplication is defined $[a] \cdot [b] = [ab]$. (Note the difference to the previous problem.) The order $|M_n|$ is also denoted $\phi(n)$ and is called *(Euler's) totient function*. Calculate $\phi(p)$ when p is prime. Calculate $\phi(24)$. (The groups M_n are called *modulo multiplication groups*, they are yet another example of a class of finite groups. Sometimes they are denoted Z_n^*.)

3. Calculate $dim \ SU(n)$.

4. Consider the set of *Mobius transformations*

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C) \right\} .$$

   i) Show that Mob is a group, with composition of mappings as the product.

   ii) Show that the mapping

$$f : SL(2, C) \to Mob \ ; \ f(A) = f_A$$

   is a homeomorphism.

   iii) Find a subgroup H of $SL(2, C)$ such that the quotient group $SL(2, C)/H$ is isomorphic to Mob. Explain why.

5. Find the conjugacy classes of the permutation group S_4. (Hint: see Jones, section 2.)