FYMM/MMP III   Harjoitus/Problem Set 1

Tehtävät palautetaan viimeistään tiistaina 26.9. klo 10 Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon. Solutions are due in 10 am on Tuesday Sep 26. There will be a box in the A-wing lobby on 2nd floor, for returns.

1. Tarkastele seuraavia konstruktioita, tutki onko kyseessä puoliryhmä, monoidi, ryhmä tai ei mikään? Perustele.
   - Reaalilukujen joukko R, tulona potenssiin korottaminen: $x \cdot y \equiv x^y$, $x, y \in R$.
   - Kaikkien värien joukko $C = \{valkoinen, sininen, keltainen, punainen, \ldots\}$ missä tulona on värien sekoittaminen.
   - Positiivisten luonnollisten lukujen joukko $N_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ missä $m, n \in N_+$:n tulo on niiden suurin yhteinen tekijä: $m \cdot n \equiv gcd(m, n)$.
   - Kokonaislukujen joukko Z, tulona yhteenlasku modulo 5: $r \cdot s \equiv r + s \ (mod\ 5)$, $r, s \in Z$. "Puuttuuko" tästä määritelmästä jotain?
   - Nollasta eroavien rationaalilukujen joukko $Q - \{0\}$, tulona tavallinen tulo: $(m/n) \cdot (p/q) = (mp/nq)$.

2. Osoita että $|S_N| = N!$.

3. Tarkastele ryhmää $G = \{e, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, missä

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

   ja tulona on matriisitulo. Osoita että tämä on isomorfinen erään tunnetun ryhmän kanssa. Konstruoi isomorfismi eksplisiittisesti.

4. Tasasivuinen kolmio on symmetrinen heijastusten suhteen kun heijastusakselina on kolmion kärjen ja keskipisteen kautta kulkeva suora, sekä 120 asteen kiertojen suhteen (kun kiertoakselina on kolmion keskipiste, kierrot oletetaan suunnistetuksi vastapäivään). Olkoon e identtinen kuvaus, a 120 asteen kierto, ja b em. heijastus. Tarkastele ryhmää jonka generoivat e, a ja b kun tulona on kuvausten yhdistäminen. Mikä on ryhmän kertaluku? (Vihje: suurempi kuin kolme.) Konstruoi ryhmän kertotaulu.

5. Samaan tapaan kuin edellisessä tehtävässä, suorakulmio on symmetrinen identtisen kuvauksen e suhteen, 180 asteen kiertojen a suhteen, pystysuoran symmetria-akselin heijastusten b suhteen, ja vaakasuoran symmetria-akselin heijastusten c suhteen. Konstruoi suorakulmion symmetriaryhmän kertotaulu. Mikä ryhmä on kyseesssä?

Same in English:

1. Consider the following constructions; check each one whether it is a semigroup, monoid, group or none of them. Why?
   - The set of real numbers R, with raising to power as multiplication: $x \cdot y \equiv x^y$, $x, y \in R$.
   - The set of all colours $C = \{white, blue, yellow, red, \ldots\}$ with mixing of colours as multiplication.
   - The set of positive natural numbers $N_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ with the greatest common divisor of $m, n \in N_+$ as their product: $m \cdot n \equiv gcd(m, n)$.
   - The set of integers Z, with addition modulo 5 as multiplication: $r \cdot s \equiv r + s\ (mod\ 5)$, $r, s \in Z$. Is something "missing" from this definition?
   - The set of nonzero rational numbers $Q - \{0\}$, with the usual product as multiplication: $(m/n) \cdot (p/q) = (mp/nq)$.
2. Show that $|S_N| = N!$.
3. Consider the group $G = \{e, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, where

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; x_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ,$$

   and the law of composition is the matrix multiplication. Show that G is isomorphic to a known group, give an explicit construction of the isomorphism.
4. An equilateral triangle is symmetric under reflections, with the line passing through the center and one of the vertices as the reflection axis; and symmetric under 120 degree counterclockwise rotations (with the center as the fixed point). Let e be the identity map (do nothing), a a rotation by 120 degrees, and b the above mentioned reflection. Consider the group generated by e, a ja b with composition of symmetry operations as the multiplication rule. What is the order of the group? (Hint: greater than three.) Construct the multiplication table (Cayley table) of the group.

5. In a similar vein as in the previous excercise, a rectangle is symmetric under the identity map e, under 180 degree rotations a, under reflections b about the vertical symmetry axis, and reflections c about the horizontal symmetry axis. Construct the multiplication table for the symmetry group of the rectangle. Can you identify the group?