Fysiikan matemaattiset menetelmät III — Sl 2005, Harjoitus 9

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 23.11. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Olkoon differentioituva monisto M_1 reaalilukujen joukko R, koordinaattina $\phi_1(x) = x$, ja M_2 myöskin R mutta koordinaattina $\phi_2(x) = x^3$. Osoita että M_1 ja M_2 ovat monistoina erilaiset, ts. ei lödy atlasta, joka sisältäisi ϕ_1 ja ϕ_2 karttoina, mutta että ne ovat diffeomorfiset. (Ts. etsi sopiva kuvaus $f : M_1 \to M_2$ ja osoita sen olevan diffeomorfismi.) Huom. Tätä huomiota voidaan kehittää osoittamaan että jokaiselle monistolle löytyy äärettömän monta differentioituvaa rakennetta.

2. Etsi projektiiviselle avaruudelle RP^n, s.o. R^{n+1}:n origon kautta kulkevien viivojen joukolle, kartasto, koordinaatit ja transitiofunktiot.

3. Osoita, että $GL(n, R)$ on differentioituva monisto.

4. Olkoon $\gamma : R \to R^2$ käyrä $x = 2t + 1, y = t^3 - 3t$. Laske tangenttivektori X_γ mielivaltaista t:n arvoa vastaavassa pisteessä. Jos funktio f on $f(x, y) = x^2 - y^2$, laske $X_\gamma f$ ja osoita että se yhtyy f:n muutosnopeuteen liikuttaessa käyrää pitkin.

5. Erään kaksiulotteisen moniston erään koordinaattiympäristön kuva on $\mathbf{R^2}$. Anna käyrä, jonka tangenttivektori pisteessä jonka koordinaatit ovat (1,1) on $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, a, b reaalilukuja. Laske Xf, kun f on funktio $f(x, y) = \tanh(3x + y^2)$. Olkoot (ξ, η) koordinaatit toisessa koordinaattiympäristössä, johon piste $(x, y) = (1, 1)$ myös kuuluu, ja olkoot transitiofunktiot $\xi = \frac{x+1}{x+y}, \eta = \frac{y+1}{x+y}$ eräässä pisteen (1,1) ympäristössä. Laske valitsemasi käyrän kaava uusissa koordinaateissa. Muunna X koordinaattikantaan $\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}$, ja tarkista että se on käyräsi tangentti.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, November 23.

1. Let the differentiable manifold M_1 be the set of real numbers R, with the coordinate $\phi_1(x) = x$, and the manifold M_2 also be R but with the coordinate $\phi_2(x) = x^3$. Show that M_1 and M_2 are different as manifolds, i.e. that no atlas can contain both $\phi_!$ and ϕ_2 as charts, but that they are diffeomorphic. (I.e., find a suitable map $f : M_1 \to M_2$ and show that it is a diffeomorphism.) Note: This idea can be developed to show that any manifold possesses an infinite number of differentiable structures.

2. Find an atlas, coordinates, and transition functions for the projective space RP^n, the set of lines through the origin of R^{n+1} .

3. Show that $GL(n, R)$ is a differentiable manifold.

4. Let $\gamma : R \to R^2$ be the curve $x = 2t + 1, y = t^3 - 3t$. Compute the tangent vector X_γ in a point corresponding to an arbitrary value of t. If f is the function $f(x, y) = x^2 - y^2$, compute $X_\gamma f$ and show that it agrees with the rate of change of f:n when moving along the curve.

5. The image of a coordinate patch of a certain two-dimensional manifold is $\mathbf{R^2}$. Give

one curve, whose tangent vector in the point with coordinates (1,1) is $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$, a, b real. Give the value of X on the function given by $f(x, y) = \tanh(3x + y^2)$. Let (ξ, η) be the coordinates on another patch, to which $(x, y) = (1, 1)$ also belongs, and let the transition functions be $\xi = \frac{x+1}{x+y}, \eta = \frac{y+1}{x+y}$ in a neighbourhood around (1,1). Compute the form of the curve you chose in these new coordinates. Transform X into the coordinate basis $\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}$, and check that it is the tangent vector of your curve.