FYSIIKAN MATEMAATTISET MENETELMÄT III. Harjoitus 6 sl 2005.

Palautetaan ke 19.10., mutta käsitellään vasta ma 31.10. (viikko 24.-28.10. opetuksesta vapaa).

1. Todista ortogonaliteettilauseet:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(T_1(g)\right)^a{}_b\left(T_2(g^{-1})\right)^i{}_j = 0\,,\ T_1\,,\ T_2 \text{ ei ekviv.}$$

ja

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(T(g)\right)^i{}_j\left(T(g^{-1})\right)^k{}_l = \frac{1}{\dim T}\delta^i_l\delta^k_j\,.$$

2. Ryhmän G esityksen T *karakteerit* ovat $\chi(g)=\mathrm{Tr}\,T(g)$ (esitysmatriisin jälki). Osoita että karakteerit ovat kannasta riippumattomia ja että ekvivalenteilla esityksillä on samat karakteerit. Osoita $\chi(e)=\dim T$. Osoita että skalaaritulo

$$(\chi_1,\chi_2)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)^*\chi_2(g)$$

häviää, jos T_1 , T_2 ovat ei-ekvivalentteja redusoitumattomia esityksiä, ja että $(\chi,\chi)=1$ redusoitumattomalle esitykselle. Osoita lopuksi että redusoitumattomien esitysten T_μ multiplisiteetit m_μ unitaarisen esityksen T reduktiossa

$$T \cong m_1T_1 \oplus m_2T_2 \oplus \cdots \oplus m_NT_N$$

saadaan kaavasta $m_\mu = (\chi,\chi_\mu)$. (Szekeres, Problem 5.14)

3. Mitkä matriisit muodostavat Lien algebrat sp(2*n*)? Tarkastele sp(2). Onko se tuttu?

4. Lien algebran su(3) kannaksi otetaan tavanomaisesti $X_j = \frac{i}{2}\lambda_i, i=1,\ldots,8$, missä Gell-Mannin λ-matriisit ovat

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

Osoita että virittäjät toteuttavat normalisaatioehdon $Tr\ (X_iX_j)=-\frac{1}{2}\delta_{ij}$. Laske rakennevakiot.

Laske $C=\sum_{i=1}^{8}X_i{}^2$ (kuuluuko Lien algebraan?) ja osoita, että se kommutoi kaikkien virittäjien kanssa.

English text:

Return by Wednesday, October 19. The corresponding exercise session is only on Monday, October 31, as there will be no teaching during the week Oct. 24 – 29.

1. Prove the orthogonality theorems

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(T_1(g)\right)^a{}_b\left(T_2(g^{-1})\right)^i{}_j = 0\,,\ T_1\,,\ T_2 \text{ not equivalent,}$$

and

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(T(g)\right)^i{}_j\left(T(g^{-1})\right)^k{}_l = \frac{1}{\dim T}\delta^i_l\delta^k_j\,.$$

2. The *characters* of a representation T of a group G are $\chi(g) = \operatorname{Tr} T(g)$ (the trace of the representation matrix). Show that the characters are independent of the choice of basis and that characters of equivalent representations are identical. Show that $\chi(e) = \dim T$. Shoe that the scalar product

$$(\chi_1, \chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)^*\chi_2(g)$$

vanishes when T_1, T_2 are inequivalent irreducible representations and that $(\chi, \chi) = 1$ for an irreducible representation. Finally, show that the multiplicities m_μ occuring in the reduction

$$T \cong m_1 T_1 \oplus m_2 T_2 \oplus \cdots \oplus m_N T_N$$

of a unitary representation T are given by $m_\mu = (\chi, \chi_\mu)$ (Szekeres, Problem 2.14).

3. What matrices constitute the Lie algebras sp(2n)? Consider sp(2). Is it familiar?

4. As a basis for the Lie algebra su(3) one usually takes $X_j = \frac{i}{2}\lambda_i, i = 1,\dots,8$, where the Gell-Mann λ-matrices are

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Show that the generators obey the normalization condition $Tr\ (X_i X_j) = -\frac{1}{2}\delta_{ij}$. Calculate the structure constants. Calculate $C = \sum_{i=1}^{8} X_i^{\,2}$ (does it belong to the Lie algebra?) and show that it commutes with all the generators.