FYSIIKAN MATEMAATTISET MENETELMÄT III. Harjoitus 5 sl 2005.

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 12.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon, käsitellään ma 18.10.

1. a)Olkoon e_1, e_2, e_3 3-ulotteisen vektoriavaruuden kanta ja

$$e_1' = e_3,\ e_2' = e_2 + 2e_3, e_3' = e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

Osoita että pilkulliset vektorin muodostavat kannan ja laske muunnosmatriisit jotka liittävät kannat toisiinsa.

b) Olkoon T lineaarinen muunnos: $Te_1 = e_2 + e_3, Te_2 = e_3 + e_1, Te_3 = e_1 + e_2$. Määrää T:n matriisi pilkuttomassa ja pilkullisessa kannassa. Osoita että toinen saadaan toisesta similariteettimuunnoksen avulla.

c) Määrää muunnosmatriisit kovektorien yo. kannoille duaalisten kantojen $\{\varepsilon^i\}, \{\varepsilon'^i\}, i = 1,2,3$ välillä.

d) Mitkä ovat kovektorin $\omega = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3$ komponentit pilkullisessa kannassa?

2. Rakenna ryhmän D_3 (harj. t. 1.3) kolmiulotteinen esitys muodostamalla kolmion symmetriakiertoja vastaavat 3×3 matriisit (aseta origo kolmion keskipisteeseen). Onko esitys redusoituva? Jos on, mihin osaesityksiin se redusoituu?

3. Osoita että jos $D(g)$ on ryhmän G matriisiesitys, niin matriisit $D^*(g)$ (kompl. konj. matriisi), $D^T(g^{-1})$, $D^\dagger(g^{-1})$ myöskin muodostavat G:n matriisiesityksiä (jotka voivat olla ekvivalentteja keskenään). Sovella tätä tulosta ryhmien SU(2) ja SU(1,1) (harj.3) matriisien muodostamiin esityksiin (*perusesityksiin*) – saatko uusia, s.o. ei-ekvivalentteja esityksiä?

4. Jos N on ryhmän G normaali aliryhmä ja $D^{G/N}$ tekijäryhmän esitys, k.o. esitys voidaan *nostaa* G:n esitykseksi D^G asettamalla

$$D^G(g) = D^{G/N}(gN).$$

Tarkista, että tämä tosiaan määrää G:n esityksen.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 12. Exercise session on Monday, October 18.

1. a)Let e_1, e_2, e_3 be a basis of a 3-diemnsional vector space and

$$e_1' = e_3,\ e_2' = e_2 + 2e_3, e_3' = e_1 + 2e_2 + 3e_3.$$

Show that the primed vectors form a basis and determine the transformation matrices that connect the two bases.

b) Let T be the linear map: $Te_1 = e_2 + e_3, Te_2 = e_3 + e_1, Te_3 = e_1 + e_2$. Determine the matrix of T in both the unprimed and the primed bases. Show that they are connected by a similarity transformation.

c) Let the dual bases to the above ones be $\{\varepsilon^i\}, \{\varepsilon'^i\}, i = 1,2,3$. Determine the transformation matrices that connect them.

d) Determine the components of the covector $\omega = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3$ in the primed basis.

2. Form a three-dimensional representation of the group D_3 (exercise 1.3) by writing down the 3×3 rotation matrices corresponding to the rotations taking the equilateral triangle into itself (put the origin in the midpoint of the triangle). Is the representation reducible? If yes, into which subrepresentations does it reduce?

3. Show that if $D(g)$ is a matrix representation of the group G, then so are $D^*(g)$ (complex conjugate matrices), $D^T(g^{-1})$, $D^\dagger(g^{-1})$ (need not all be inequivalent). Apply this result to the representations formed by the matrices of the groups SU(2) and SU(1,1) (exercise sheet 3) themselves (*fundamental representations*) –do you get "new", i.e. non-equivalent representations?

4. Given a normal subgroup N of a group G, a representation $D^{G/N}$ of the quotient group can be *lifted* to give a D^G of G by defining

$$D^G(g) = D^{G/N}(gN).$$

Verify that this indeed provides a representation of G.