Fysiikan matemaattiset menetelmät III   Sl 2005, Harjoitus 4

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 5.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1.

a) Olkoon H ryhmän G aliryhmä. Määritellään G:n vaikutus sivuluokkien joukkoon G/H:
$$g(g'H) = gg'H \equiv f_g(g'H).$$
Osoita että tämä vaikutus on transitiivinen.

b) G vaikuttaa transitiivisesti joukkoon $X, x \in X$ ja $G_x =$ alkion x isotropiaryhmä eli pikku ryhmä. Osoita että kuvaus
$$\iota : G/G_x \longrightarrow X, \iota(gG_x) = gx$$
on hyvin määritelty ja bijektio.

c) Otetaan a-kohdan aliryhmäksi $H = G_x$. Osoita että jokaiselle $y \in X$ pätee
$$(\iota \circ f_g \circ \iota^{-1})(y) = gy,$$
eli G:n vaikutus X:ään voidaan samaistaa G:n vaikutukseen G/G_x:ään.

d) Sovella tapaukseen $G = SO(3), X = \mathbf{R}^3$:n yksikkövektorien joukko.

2. n-ulotteinen *Eukliidinen ryhmä* muodostuu rotaatioista (joita kuvaa matriisi A) ja translaatioista (vektorin c verran) s.e. $x \mapsto x' = Ax + c$. Mikä on ryhmän tulosääntö? Osoita että $n+1$-ulotteiset matriisit muotoa $\begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ muodostavat ryhmän ja että tämä ryhmä on isomorfinen Eukliidisen ryhmän kanssa.

3. Olkoon V Abelin ryhmä, tulo merk. "+", ja G ryhmä joka vaikuttaa vasemmalta V:hen. Oleta että vaikutus on V:n homomorfismi: $g(v + w) = gv + gw$.

a) Osoita että $G \times V$ on ryhmä kun tulosäännöksi otetaan
$$(g, v)(g', v') = (gg', v + gv').$$
Tätä ryhmää kutsutaan G:n ja V:n puolisuoraksi tuloksi.

b) Osoita että muotoa $(g, 0)$ olevat alkiot muodostavat puolisuoran tulon aliryhmän joka on isomorfinen G:n kanssa ja että toisaalta V on ismorfinen alkioden (e, v) muodostaman aliryhmän kanssa. Osoita että jälkimmäinen on normaali.

c) Osoita että puolisuoran tulon jokainen alkio voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa vg, missä $g \equiv (g, 0) \in G$ ja $v \equiv (e, v) \in V$.

4. Selvitä miten Eukliidinen ryhmä ja Poincarén ryhmä voidaan ymmärtää puolisuorina tuloina.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 5.

1.

a) If H is any subgroup of a group G define the action of G on the set of left cosets G/H by

$$g(g'H) = gg'H \equiv f_g(g'H).$$

Show that this is always a transitive action.

b) Let G have a transitive left action on a set X. Let $x \in X$ and let G_x be the isotropy group of x. Show that the map

$$\iota : G/G_x \longrightarrow X, \iota(gG_x) = gx$$

is well-defined and bijective.

c) Now take $H = G_x$ in a). Show that for all $y \in X$

$$(\iota \circ f_g \circ \iota^{-1})(y) = gy,$$

i.e. the action of G on X can be identified with the action of G on G/G_x.

d) Apply these result to the case $G = SO(3), X =$ the unit vectors of $\mathbf{R}^3$.

2. The *Euclidean group* in n dimensions is the group of rotations (by a matrix A) and translations (by a vector c), so that $x \mapsto x' = Ax + c$. Find the composition law for two successive affine transformations and hence show that there is a 1:1 correspondence between this group and the group of $(n+1)$-dimensional matrices of the form $\begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Let V be an abelian with law of composition "+", and G any group with a left action on V. Assume further that this action is a homomorphism of V: $g(v + w) = gv + gw$.

a) Show that $G \times V$ is a group with respect to the law of composition

$$(g, v)(g', v') = (gg', v + gv').$$

This group is known as the semi-direct product of G and V.

b) Show that the elements of type $(g, 0)$ form a subgroup of the semi-direct product that is isomorphic with G:n and that V is isomorphic with the subgroup (e, v). Show that the latter is a normal subgroup.

c) Show that every element of the semi-direct product has a unique decomposition vg, where $g \equiv (g, 0) \in G$ and $v \equiv (e, v) \in V$.

4. Explain how the Euclidean group and the Poincaré group can be understood as semi-direct products.