

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 28.9. Physicum 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Kvaternioniryhmä Q koostuu 8 alkioista $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$ jotka toteuttavat:

$$\begin{aligned} 1g &= g1 = g, \forall g \in Q; \\ -1g &= g(-1) = -g, g = i, j, k; \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1; \\ ij &= k, jk = i, ki = j. \end{aligned}$$

i) Kirjoita ryhmän koko kertotaulukko.

ii) Löydä Q :n kaikki aliryhmät ja osita että ne ovat normaaleja.

iii) Osoita että alkioista $\{1, -1, i, -i\}$ koostuva aliryhmä on erään homomorfismin $Q \rightarrow \{1, -1\}$ ydin.

iv) Löydä symmetrisen ryhmän S_4 aliryhmä H s.e. on olemassa homomorfismi $Q \rightarrow H$ jonka ydin on aliryhmä $\{1, -1\}$.

(Szekeres, tehtävä 2.15)

2. Osoita että $O(n+1)/O(n) = S^n$, $U(n+1)/U(n) = S^{2n+1}$.

3. 2x2-kompleksimatriiseja

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kutsutaan Paulin spin-matriiseiksi.

i) Osoita että kuvaus $R: SU(2) \rightarrow SO(3, R)$, $U \mapsto R(U)$, missä

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

(tr = matriisin jälki) on homomorfismi.

ii) Voidaan osoittaa että R on surjektio. Osoita että kuvauksena $SU(2)/Z_2$:sta $SO(3, R)$:ään R on isomorfismi.

Vihje: spin-matriisit toteuttavat

$$\sigma_k \sigma_l = 1_{2 \times 2} \delta_{kl} + i \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} \sigma_m .$$

4. $SU(1, 1)$ on ryhmä jonka alkiot \tilde{g} ovat 2x2-kompleksimatriiseja

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} z & w \\ w^* & z^* \end{pmatrix},$$

missä $|z|^2 - |w|^2 = 1$ ja $SL(2, R)$:n alkiot g ovat 2x2-reaalimatriiseja

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

missä $ad - bc = 1$. Osoita että kuvaus μ ,

$$\mu(g) = NgN^{-1}$$

missä

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

on isomorfismi $\mu : SL(2, R) \rightarrow SU(1, 1)$.

5. Osoitit tehtävässä 2.3 että $SU(2)$:n matriisit voitiin kirjoittaa muodossa

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix},$$

jossa reaali- ja imaginaariluvut $x_i, i = 0, \dots, 3$ toteuttavat ehdon $x_0^2 + \dots + x_3^2 = 1$. Siispä $SU(2)$:n koordinaatit kuuluvat yksikköpallon S^3 pinnalle.

i) Osoita että vastaavasti $SL(2, R)$ voidaan parametrisoida neljällä koordinaatilla x_0, \dots, x_3 joiden välillä on sidosehto muotoa

$$c_0x_0^2 + c_3x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = c.$$

Etsi c_0, c_3, c . Vihje: yhtälö tulee kuvaamaan yhdestä neljästä mahdollisesta 3-ulotteisesta ns. yksikköpseudopallosta. Yleisemmin n -ulotteiset yksikköpseudopallot ovat vakiokaarevia n -ulotteisia hyperpintoja R^{n+1} :ssä, joita kuvaa yhtälö

$$c_0x_0^2 + c_nx_n^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = c,$$

missä $c_0, c_n, c = \pm 1$. Mahdollisia vaihtoehtoja on neljä:

- $(c_0, c_n, c) = (-1, -1, -1)$: n -ulotteinen anti-de Sitter avaruus adS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, 1)$: n -ulotteinen de Sitter avaruus dS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, -1)$: n -ulotteinen hyperbolinen avaruus H_n
- $(c_0, c_n, c) = (1, 1, 1)$: n -ulotteinen pallo S^n .

ii) Etsi $SL(2, R)$:n konjugaattiluokat (vihje: niitä on kolmea eri tyyppiä) ja tulkitse ne mahdollisuuksien mukaan 2-ulotteisina pseudopalloina.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, September 28.

1. The quaternion group Q consists of the 8 elements $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$ subject to

$$\begin{aligned}1g &= g1 = g, \forall g \in Q; \\ -1g &= g(-1) = -g, g = i, j, k; \\ i^2 &= j^2 = k^2 = -1; \\ ij &= k, jk = i, ki = j.\end{aligned}$$

- i) Write down the full multiplication table for Q .
- ii) Find all subgroups of Q and show that they are normal.
- iii) Show that the subgroup consisting of $\{1, -1, i, -i\}$ is the kernel of a homomorphism $Q \rightarrow \{1, -1\}$.
- iv) Find a subgroup H of the symmetric group S_4 , such that there is a homomorphism $Q \rightarrow H$ whose kernel is the subgroup $\{1, -1\}$.

(Szekeres, problem 2.15)

2. Show that $O(n+1)/O(n) = S^n$, $U(n+1)/U(n) = S^{2n+1}$.

3. The 2x2 complex matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are called Pauli spin matrices.

i) Show that the map $R: SU(2) \rightarrow SO(3, R)$, $U \mapsto R(U)$, where

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

(tr = matrix trace) is a group homomorphism.

ii) It can be shown that R is a surjection. Show that as a map $SU(2)/Z_2 \rightarrow SO(3, R)$ R is an isomorphism.

Hint: the spin matrices satisfy

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i \sum_{m=1}^3 \epsilon_{klm} \sigma_m .$$

4. $SU(1, 1)$ is a group where the elements \tilde{g} are 2x2 complex matrices

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} z & w \\ w^* & z^* \end{pmatrix},$$

with $|z|^2 - |w|^2 = 1$. The elements of $SL(2, R)$ are 2x2 real matrices

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

with $ad - bc = 1$. Show that the map μ ,

$$\mu(g) = NgN^{-1}$$

where

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

is an isomorphism $\mu : SL(2, R) \rightarrow SU(1, 1)$.

5. In problem 2.3 you showed that the $SU(2)$ matrices can be written in the form

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix},$$

where the real parameters $x_i, i = 0, \dots, 3$ satisfy the constraint $x_0^2 + \dots + x_3^2 = 1$. Thus the parameters of $SU(2)$ are coordinates of a unit sphere S^3 .

i) Show that $SL(2, R)$ can be parameterized by four real numbers x_0, \dots, x_3 which satisfy a constraint of the form

$$c_0x_0^2 + c_3x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = c.$$

Find c_0, c_3, c . Hint: The equation will describe one of the four so-called unit pseudospheres. In general, n -dimensional unit pseudospheres are n -dimensional hypersurfaces of constant curvature in R^{n+1} , defined by an equation of type

$$c_0x_0^2 + c_nx_n^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = c,$$

where $c_0, c_n, c = \pm 1$. There are four possible alternatives:

- $(c_0, c_n, c) = (-1, -1, -1)$: n -dimensional anti-de Sitter space adS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, 1)$: n -dimensional de Sitter space dS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, -1)$: n -dimensional hyperbolic space H_n
- $(c_0, c_n, c) = (1, 1, 1)$: n -sphere S^n .

ii) Find the conjugacy classes of $SL(2, R)$ (hint: there are 3 different types of them) and interpret them as 2-dimensional pseudospheres, if possible.