Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2005, Harjoitus 2

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 21.9. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Tutki mitkä seuraavista ryhmistä ovat isomorfisia ja rakenna isomorfismit eksplisiittisesti:

(i) kompleksiluvut $(1, i, -1, -i)$ kertolaskun suhteen;

(ii) kokonaisluvut (2,4,6,8) kertolaskun mod 10 suhteen;

(iii) permutaatiot (), (12), (34), (12)(34);

(iv) permutaatiot (), (1234), (1432), (13)(24);

(v) neljä matriisia

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

matriisien kertolaskun suhteen.

2. Osoita että $\mathrm{U}(n)$ on $\mathrm{GL}(n, C)$:n aito aliryhmä, ja että $\dim \mathrm{U}(n) = n^2$.

3. Osoita että jokainen SU(2):n alkio on muotoa

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix},$$

missä $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

4. Tarkastellaan *Möbius-kuvausten* joukkoa

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C) \right\} .$$

i) Osoita että Mob on ryhmä, kun tulona on kuvausten yhdistäminen.

ii) Osoita että kuvaus

$$f : SL(2, C) \to Mob \; ; \; f(A) = f_A$$

on homomorfismi. Mikä on homomorfismin ydin?

5. Etsi permutaatioryhmän S_4 konjugaattiluokat.

6. Edellisten harjoitusten 3. tehtävässä esiintynyt ryhmä on esimerkki ns. **dihedrisistä ryhmistä** D_n, jotka ovat suunnistamattomien n-polygonien symmetriaryhmiä (rotaatiot vastapäivään ja heijastukset). Harj. 1 tehtävä 3:n ryhmä oli D_3. Tarkastellaan seuraavaksi 1. luennolla käsiteltyä ryhmää D_4, eli neliön symmetriamuunnoksia. Ryhmän generoivat identiteettikuvaus e, 90 asteen rotaatio a origon suhteen vastapäivään, sekä heijastus c origon ja yhden sivun keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Etsi D_4:n konjugaattiluokat

i) tulkitsemalla D_4:n elementit neliön kärkien permutaatioina (eli permutaatioryhmän S_4 elementteinä).

ii) käyttämällä geometrista tulkintaa.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, September 21.

1. State which of the following groups are isomorphic to each other, giving the explicit correspondence where an isomorphism exists:

(i) the complex numbers $(1, i, -1, -i)$ with respect to multiplication;

(ii) the integers (2,4,6,8) with respect to multiplication modulo 10;

(iii) the permutations (), (12), (34), (12)(34);

(iv) the permutations (), (1234), (1432), (13)(24);

(v) the four matrices

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

with respect to matrix multiplication.

2. Show that U(n) is a proper subgroup of GL(n, C) and that dim U$(n) = n^2$.

3. Show that every element of SU(2) has the form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix},$$

where $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

4. Consider the set of *Moebius transformations*

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C) \right\} .$$

i) Show that Mob is a group, with composition of mappings as the product.

ii) Show that the mapping

$$f : SL(2, C) \to Mob \; ; \; f(A) = f_A$$

is a homeomorphism. Determine the kernel of the homomorphism.

5. Find the conjugacy classes of the permutation group S_4.

6. In exercise 3 of the first problem set, you considered an example of so called **dihedral groups** D_n, the symmetry groups of regular polygons with n undirected sides (with counterclockwise rotations and reflections as the symmetry operations). The group in exercise 1.3 was D_3. Consider now the group D_4 : the symmetry transformations of a square (considered in the first lecture). It is generated by the identity map e, 90 degree counterclockwise rotations a about the origin, and reflections c about a symmetry axis through the origin and the center point of one of the sides. Find the conjugacy classes of D_4

i) by considering the elements of D_4:n as permutations $\in S_4$ of the vertices of the square.

ii) by geometrical considerations.