Fysiikan matemaattiset menetelmät III   Sl 2005, Harjoitus 12

Tehtävät palautetaan viimeistään perjantaina (huom. tavanomaisesta poikkeava viikonpäivä!) 16.12. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon. Viimeinen luento 14.12., viimeinen harjoitus ma 19.12.

1. (Szekeres 17.4) Olkoon $\alpha = y^2dx+x^2dy$ Jos γ_1 on y-akselin pisteestä (0,-1) pisteeseen (0,1) kulkeva osa ja γ_2 samoja pisteitä yhdistävä yksikköympyrän oikeanpuolinen kaari, laske $\int_{\gamma_1} \alpha$, $\int_{\gamma_2} \alpha$, $\int_{S^1} \alpha$. Todenna Stokesin lause ykkösympyrälle ja γ_1:n ja γ_2:n rajoittamalle aluelle.

2. (Szekeres 17.5) Jos $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$, laske $\int_{\partial\Omega} \alpha$, kun Ω on R^3:n (i)yksikkökuutio, (ii) yksikkökuula. Kummasakin tapauksessa tarkista että Stokesin lause pätee.

3. Olkoon
$$\omega = \frac{x_1dx_2 \wedge dx_3 - x_2dx_1 \wedge dx_3 + x_3dx_1 \wedge dx_2}{|x|^3}$$
2-muoto $R^3 \setminus \{0\}$:ssa. Näytä että ω on suljettu ($d\omega = 0$). Laske
$$\int_{S^2} \omega.$$
Vihje: Yksi tapa:
$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2 \setminus \{0,0,1\}} \omega.$$
(Miksi?). Käyttäen $S^2 \setminus \{0,0,1\}$:n stereografista kuvausta f R^2:lle laske
$$\int_{S^2} \omega = \int_{R^2} (f^{-1})^* \omega.$$

4. Olkoon metriikka toruksella T^2 jonka säteet ovat r ja $R > r$
$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R + r\cos\theta)^2 d\phi \otimes d\phi \ ,$$
missä $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$. Laske Christoffelin symbolit
$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$$
tälle metriikalle .

5. Johda geodeettiset yhtälöt toruksella tehtävän 4 metriikalle

   i) variaatioperiaatteella käyttäen hyväksi vapaan massiivisen pistehiukkasen Lagrangen funktiota (käyrän pituuden vaikutusta, ks. prujujen kappale 5.9 tai Szekeres, kappale 18.4). Sijoita aluksi toruksen metriikka (sopivaan) Lagrangen tiheyteen.

   ii) sijoittamalla tehtävän 4 Christoffelin symbolit geodeettisen viivan yleiseen yhtälöön.

   Kumpi menetelmä olisi mielestäsi helpompi, jos et olisi jo laskenut Christoffelin symboleita edellisessä tehtävässä? Tämän jälkeen,

iii) Ratkaise yhtälöt ja

iv) Hahmottele esimerkkejä geodeettisista viivoista toruksella.

English text:
Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Friday, December 16 (note change in weekday from usual!). Last lecture December 14, last exercise session Monday, December 19.

1. (Szekeres 17.4) Let $\alpha = y^2dx + x^2dy$. If γ_1 is the stretch of the y-axis from the point (0,-1) to the point (0,1), and γ_2 the unit right semicircle connecting these points, evaluate $\int_{\gamma_1} \alpha, \int_{\gamma_2} \alpha, \int_{S^1} \alpha$. Verify Stokes' theorem for the unit circle and the unit right semicircular region encompassed by γ_1 and γ_2.

2. (Szekeres 17.5) If $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ compute $\int_{\partial\Omega} \alpha$ where Ω is (i) the unit cube, (ii) the unit ball in R^3. In each case verify Stokes' theorem.

3. Let ω be the 2-form
$$\omega = \frac{x_1dx_2 \wedge dx_3 - x_2dx_1 \wedge dx_3 + x_3dx_1 \wedge dx_2}{|x|^3}$$
on $R^3 \setminus \{0\}$. Show that ω is closed ($d\omega = 0$). Calculate
$$\int_{S^2} \omega.$$
Hint: One way is to first notice that
$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2 \setminus \{0,0,1\}} \omega.$$
(why?) and then use the inverse of the stereographic map f from $S^2 \setminus \{0, 0, 1\}$ to R^2 to calculate
$$\int_{S^2} \omega = \int_{R^2} (f^{-1})^* \omega.$$

4. Calculate the Christoffel symbols for the metric
$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R + r\cos\theta)^2 d\phi \otimes d\phi \ ,$$
on the torus T^2 with major radius R and minor radius r.

5. Find the geodesic equation(s) on a torus with the metric of the previous problem, by

   i) using the variational principle and the action of a free massive point particle (the expression for the length of a curve, see section 5.9 of the old lecture notes or section 18.4 of Szekeres). As a first step, substitute the torus metric into the (suitable) Lagrangian.

   ii) substituting the Christoffel symbols from problem 4 to the general geodesic equation.

   Which method do you think would be easier, if you had not already calculated the Christoffel symbols in problem 4? Next,

   iii) Solve the equations, and

   iv) sketch some examples of geodesics on a torus.