Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2005, Harjoitus 10

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 30.11. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Johda muunnoskaava tensorin

$$T = T^{\mu_1\mu_2}_{\quad\;\; \nu_1\nu_2\nu_3} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes dx^{\nu_3}$$

komponenteille koordinaattimuunnoksessa $x \to y$.

2. Olkoon X R^3:n vektorikenttä

$$X = X^i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \; .$$

Määritellään (1,1)-tensorikenttä S_{st},

$$S_{st} = S^i_j \, \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \; ,$$

jonka komponentit S^i_j ovat

$$S^i_j = \frac{1}{2}\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial X^j}{\partial x^i} - \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial X^k}{\partial x^k}\right) \delta^i_j \; .$$

Laske komponentit S^i_j kun $X^1 = 0, X^2 = k \cdot x^1, X^3 = 0$, k on vakio (reaaliluku). Kommentti: S_{st} on elastiseen kappaleeseen kohdistuvaa halkaisevaa jännitystä (shearing strain) kuvaava jännitystensori. Tehtävässä kappale on elastinen palkki, johon kohdistuu pituussuunnassa halkaiseva jännitys. Katso K. Symon, *Mechanics*, s. 237, 437-8.

3. a) Olkoot X, Y ja Z vektorikenttiä. Osoita että Lie derivaatta toteuttaa $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\, Z = \mathcal{L}_{[X,Y]}\, Z$. (Tämä on *Jacobin identiteetin* eräs muoto.)

b) Osoita että ulkotulo toteuttaa ominaisuudet

i) $\omega \wedge \omega = 0$, kun ω:n kertaluku on pariton

ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \omega$

iii) $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$

missä kohtien ii),iii) ω, η, ξ ovat q, r, s-muotoja.

4. **Hamiltonin liikeyhtälöt esimerkkinä vektorikentän generoimasta virtauksesta**. Klassisesta mekaniikasta on (toivottavasti) tuttua se, että systeemiä jolla on N vapausastetta voidaan kuvata N:llä yleistetyllä koordinaatilla q_i ja kanonisella impulssilla p_i, missä $i = 1, \ldots, N$. Yleistetyt koordinaatit ja kanoniset impulssit voidaan ajatella $2N$-ulotteisen moniston M koordinaateiksi, M:ää kutsutaan *faasiavaruudeksi.* Systeemin

dynamiikkaa kuvaa Hamiltonin funktio $H : M \to R$, $H = H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$ ja sen liikeyhtälöt voidaan kirjoittaa ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmänä

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; .$$

Em. yhtälöitä kutsutaan Hamiltonin yhtälöiksi. Kirjoitetaan seuraavaksi yhtälöt eri tavalla. Määritellään vektorikenttä X_H faasiavaruudessa M,

$$X_H = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} \; .$$

Vektorikentän X_H integraalikäyrä $x_H(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t), p_1(t), \ldots, p_N(t))$ on käyrä monistolla M.

i) Osoita että integraalikäyrää $x_H(t)$ kuvaavat yhtälöt vastaavat Hamiltonin yhtälöitä.

ii) Olkoon $M = R^2$, eli $N = 1$, ja $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Etsi X_H ja sen generoima virtaus $\sigma(t, x_0)$ missä $x_0 = (q_0, p_0) = (1, 0)$. Piirrä kuva.

iii) Samoin kuin edellä mutta nyt $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$ ja $x_0 = (1, 1)$.

iv) Nyt $M = T^2$, koordinaatteina $q, p \in [0, 2\pi]$, ja $H = \cos(p)$. Etsi integraalikäyrän yhtälö. Piirrä kuva integraalikäyristä T^2:lla.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, November 30.

1. Derive the transformation rule for the components of the tensor

$$T = T^{\mu_1 \mu_2}_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes dx^{\nu_3}$$

in the coordinate transformation $x \to y$.

2. Let X be a vector field in R^3,

$$X = X^i(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \; .$$

We then define a (1,1) tensor field S_{st},

$$S_{st} = S^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \; ,$$

with the components S^i_j given by

$$S^i_j = \frac{1}{2} \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} - \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \right) \delta^i_j \; .$$

Calculate the components S^i_j when $X^1 = 0, X^2 = k \cdot x^1, X^3 = 0$, k is a (real valued) constant. Comment: S_{st} is a shear tensor, which describes the shearing strain on an elastic body. In this exercise the body is an elastic beam, subject to a shearing force parallel to the beam. See K. Symon, *Mechanics*, s. 237, 437-8.

3. a) Let X, Y and Z be vector fields. Show that the Lie derivative satisfies $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\, Z = \mathcal{L}_{[X,Y]}\, Z$. (This is one form of the *Jacobi identity*.)

b) Show that the wedge product satisfies the properties

i) $\omega \wedge \omega = 0$, when ω is an odd form

ii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \omega$

iii) $(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi)$

where in ii),iii) ω, η, ξ are q, r, s-forms.

4. **Hamilton's Equations as an Example of a Flow Generated by Vector Field**. It should be familiar from Classical Mechanics that a system with N degrees of freedom can be described by generalized coordinates q_i and canonical momenta p_i, where $i = 1, \ldots, N$. The generalized coordinates and canonical momenta can be thought as coordinates of a $2N$-dimensional manifold M, called the *phase space*. The dynamics of the system is given by the Hamiltonian, $H : M \to R$, $H = H(q_1, \ldots, q_N, p_1, \ldots, p_N)$; its equations of motion can be written as a group of first order differential equations

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; ; \; \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \; .$$

These are called the Hamilton's equations. We will next reformulate them in a different way. Let's define a vector field X_H in the phase space M,

$$X_H = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} \; .$$

The vector field X_H gives rise to integral curves $x_H(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t), p_1(t), \ldots, p_N(t))$ on the manifold M.

i) Show that the equation defining the integral curves $x_H(t)$ is equivalent to Hamilton's equations.

ii) Let $M = R^2$, i.e. $N = 1$, and $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Find X_H and the generated flow $\sigma(t, x_0)$ where $x_0 = (q_0, p_0) = (1, 0)$. Illustrate it by a figure.

iii) As before, but now with $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$ ja $x_0 = (1, 1)$.

iv) Now $M = T^2$, with coordinates $q, p \in [0, 2\pi]$, and $H = \cos(p)$. Find the equation of the integral curve. Draw a figure of the curves on T^2.