Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2004, Harjoitus 7

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 27.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Professori H. Ajamieli muistaa jatkuvan funktion määritelmän väärin ja kirjoittaa taululle: "Funktio f on jatkuva, jos avoimen joukon X kuva Y on avoin". Löydä yhden reaaliarvoisen muuttujan reaaliarvoisten funktioiden joukosta esimerkki, joka osoittaa tämän määritelmän olevan ristiriidassa tavallisen jatkuvuuden käsitteen kanssa.

2. Minkä näköiset ovat R^2:n avoimet kiekot $U_\epsilon(x) = \{y \mid d(x,y) < \epsilon\}$ kun metriikka on $d(x,y) = (|x^1 - y^1|^p + |x^2 - y^2|^p)^{1/p}, p = 1, 2, \infty$?

3. Olkoon $X = \{\text{Arska}, \text{Kake}, \text{Pave}, \text{Reiska}\}$ ja $U_0 = \emptyset$, $U_1 = \{\text{Arska}\}$, $U_2 = \{\text{Arska}, \text{Kake}\}$, $U_3 = X$. Osoita että $\tau = \{U_0, U_1, U_2, U_3\}$ määrittelee X:n topologian. Osoita että (X, τ) ei ole Hausdorffin avaruus.

4. Osoita että R^n varustettuna tavallisella topologialla on Hausdorffin avaruus. Olkoon X joukko jossa on määritelty metriikka d. Osoita että X varustettuna metrisellä topologialla on Hausdorffin avaruus.

5. Olkoon $f : M \to N$ homeomorfismi. Määritellään kuvaus $f_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, f(x_0))$ ehdolla $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Osoita että f_* on ryhmäisomorfismi (eli $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(N, f(x_0))$).

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 27.

1. Professor S. C. Atterbrain remembers the definition of a continuous function incorrectly, and writes on the blackboard: "A function f is continuous if it maps an open set X into an open set Y". Find an example among real-valued functions of one real variable that shows that such a definition contradicts our usual concept of continuity.

2. What do the open disks $U_\epsilon(x) = \{y \mid d(x,y) < \epsilon\}$ of R^2 look like when the metric is $d(x,y) = (|x^1 - y^1|^p + |x^2 - y^2|^p)^{1/p}, p = 1, 2, \infty$?

3. Let $X = \{\text{Billy}, \text{Bob}, \text{Jim}, \text{Joe}\}$ and $U_0 = \emptyset$, $U_1 = \{\text{Billy}\}$, $U_2 = \{\text{Billy}, \text{Bob}\}$, $U_3 = X$. Show that $\tau = \{U_0, U_1, U_2, U_3\}$ gives a topology in X. Show that (X, τ) is not Hausdorff.

4. Show that R^n with the usual topology is Hausdorff. Let X be a set with a metric d. Show that X with the metric topology is Hausdorff.

5. Let $f : M \to N$ be a homeomorphism. Define a map $f_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, f(x_0))$ such that $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Show that f_* is a group isomorphism (*i.e.* $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(N, f(x_0))$)