Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2004, Harjoitus 6

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 20.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Olkoon $D(g)$ ryhmän G n-ulotteinen matriisiesitys. Osoita, että matriisit $D^*(g)$ (kompleksikonjugaattimatriisi), $D^T(g^{-1})$ (transponoitu matriisi)ja $D^\dagger(g^{-1})$ (hermiittinen konjugaatti) myöskin määrittelevät G:n n-ulotteisia esityksiä (mahdollisesti ekvivalentteja D:n kanssa tai keskenään). Kun G on matriisiryhmä, määrittelevät matriisit itse tietenkin esityksen, *määrittelevän esityksen*. Osoita että tapauksessa $G = \mathrm{SU}(2)$, D määrittelevä esitys, yllä saadut uudet esitykset ovat kaikki ekvivalentteja määrittelevän esityksen kanssa, mutta tapauksessa $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ saadaan uusi, määrittelevän esityksen kanssa ei-ekvivalentti esitys.

2. Todista suuri ortogonaliteettilause.

3. Laske ryhmien D_3 (harj. teht. 1.3) ja D_4 (harj. teht. 2.5) karakteeritaulukot.

4. Määritellään $n \times n$ matriisin A ja $m \times m$ matriisin B *suora tulo* $A \otimes B$ $mn \times mn$ matriisiksi, jonka vaaka- ja pystyrivit ideksoidaan parien $(ij), i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$ avulla (jossakin järjestyksessä) ja

$$(A \otimes B)_{(ij),(kl)} = A_{ik}B_{jl}.$$

Osoita: Jos $D^{(i)}$ ja $D^{(j)}$ ovat ryhmän G kaksi esitystä, niin $D^{(i)} \otimes D^{(j)}$ on myös esitys. Kun G on äärellinen sekä $D^{(i)}$ ja $D^{(j)}$ unitaarisia redusoitumattomia esityksiä, esitä kaava suoran tulon reduktiossa

$$D^{(i)} \otimes D^{(j)} = \oplus \sum_k n^k{}_{ij} D^{(k)}$$

(”Clebsch-Gordan sarja”) esiintyville kertoimille $n^k{}_{ij}$. (Vihje: Jones ss. 74-5.)

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 20.

1. Let $D(g)$ be an n-dimensional matrix representation of the group G. Show that the matrices $D^*(g)$ (complex conjugate matrix), $D^T(g^{-1})$ (transposed matrix) and $D^\dagger(g^{-1})$ (Hermitean conjugate matrix) also form n-dimensional representations of G (which may or may not be equivalent to D or to each other). When G is a matrix group, the matrices themselves of course define a representation, the *defining representation*. Show that in the case $G = \mathrm{SU}(2)$, D the defining representation, all new representations generated by the above procedure are equivalent to the defining one, but that in the case $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ we do get one genuinely different representation.

2. Prove the Fundamental Orthogonality Theorem.

3. Compute the character tables of the groups D_3 (ex. 1.3) and D_4 (ex. 2.5).

4. The *direct product* $A \otimes B$ of the $n \times n$ matrix A and the $m \times m$ matrix B is defined as the $mn \times mn$ matrix

$$(A \otimes B)_{(ij),(kl)} = A_{ik} B_{jl},$$

where rows and columns are indexed by the pairs $(ij), i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$ taken in some order. Show: If $D^{(i)}$ and $D^{(j)}$ are two representations of the group G, then $D^{(i)} \otimes D^{(j)}$ is also a representation. When G is finite and $D^{(i)}$ and $D^{(j)}$ unitary irreducible representations, derive a formula giving the coefficients ${n^k}_{ij}$ occurring in the reduction

$$D^{(i)} \otimes D^{(j)} = \oplus \sum_k {n^k}_{ij} D^{(k)}$$

("the Clebsch-Gordan series") of the direct product. (Hint: See Jones pp. 74-5.)