Fysiikan matemaattiset menetelmät III   Sl 2004, Harjoitus 4

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 6.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. n-ulotteinen *affiininen ryhmä* muodostuu rotaatioista (joita kuvaa matriisi A) ja translaatioista (vektorin c verran) s.e. $x \mapsto x' = Ax + c$. Mikä on ryhmän tulosääntö? Osoita että $n+1$-ulotteiset matriisit muotoa $\begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ muodostavat ryhmän ja että tämä ryhmä on isomorfinen affiinisen ryhmän kanssa.

2. Osoita, että R^{2n}:n lineaariset, homogeeniset muunnokset $x \mapsto x' = Ax$, jotka säilyttävät skalaaritulon

$$x \cdot y \equiv \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i)$$

muodostavat ryhmän, nk. symplektisen ryhmän Sp($2n$,R). Osoita, että sen dimensio on $n(2n+1)$. Sp(2,R) on isomorfinen toisen matriisiryhmän kanssa; minkä?

3. Osoita että äärellisulotteisen vektoriavaruuden jokaisessa kannassa on sama lukumäärä kantavektoreita.

4. Olkoon N ryhmän G normaali aliryhmä, ja G/N vastaava tekijäryhmä. Olkoon annettu G/N:n esitys $D^{G/N}$. Osoita että asettamalla $D^G(g) = D^{G/N}(gN)$ saadaan G:n esitys, jossa siis alkiota g vastaa sen sivuluokan, johon g kuuluu, esitysmatriisi esityksessä $D^{G/N}$. Näin tekijäryhmän esitys voidaan "nostaa" ryhmän esitykseksi.

5. Ryhmä G vaikuttaa vasemmalta joukkoon X.

i) Osoita että asettamalla

$$\begin{aligned} D : G &\to Aut(Map(X, C)) \ ; \ g \mapsto D(g) \\ (D(g)f)(x) &\equiv f(g^{-1}x) \ , \end{aligned}$$

D määrittelee G:n esityksen vektoriavaruudessa $Map(X, C)$.

ii) Jos X on äärellinen joukko, osoita että saatu esitys on unitaarinen skalaaritulon

$$\langle f_1 | f_2 \rangle \equiv \sum_{x \in X} f_1^*(x) f_2(x)$$

suhteen.

iii) Mikä olisi sopiva skalaaritulo jos $X = R^n$? (Nyt X ei ole äärellinen, joten esityksen unitaarisuus pitäisi tarkastella erikseen, ei kuulu tehtävään.)

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 6.

1. The *affine group* in n dimensions is the group of rotations (by a matrix A) and translations (by a vector c), so that $x \mapsto x' = Ax + c$. Find the composition law for two successive affine transformations and hence show that there is a 1:1 correspondence between this group and the group of $(n+1)$-dimensional matrices of the form $\begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Show that the linear, homogenous transformations $x \mapsto x' = Ax$ of R^{2n} which preserve the scalar product

$$x \cdot y \equiv \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i)$$

form a group, the symplectic group Sp($2n$,R). Show that the dimension of this group is $n(2n+1)$. The group Sp(2,R) is isomorphic to another matrix group; which?

3. Show that two bases of a finite-dimensional vector space must have the same number of elements. (Jones, problem 3.5)

4. Given a normal subgroup N of a group G, a representation $D^{G/N}$ of the quotient group G/N can be "lifted" to give a representation D^G of the full group G by the following definition: $D^G(g) = D^{G/N}(gN)$, i.e. each element of the group is assigned the matrix $D^{G/N}$ of the coset to which it belongs. Verify that D^G indeed provides a representation of G. (Jones, problem 3.4)

5. A group G acts from left on a set X.

i) Show that the map

$$\begin{aligned} D : G &\rightarrow Aut(Map(X, C)) \ ; \ g \mapsto D(g) \\ (D(g)f)(x) &\equiv f(g^{-1}x) \ , \end{aligned}$$

defines a representation of G in the vector space $Map(X, C)$.

ii) If X is finite, show that the representation is unitary with respect to the scalar product

$$\langle f_1 | f_2 \rangle \equiv \sum_{x \in X} f_1^*(x) f_2(x) \ .$$

iii) If $X = R^n$, what would be a suitable scalar product? (Now X is infinite, so the unitarity of the representation would need to be checked. You don't have to do it.)