

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 22.9. Physicum 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Tutki mitkä seuraavista ryhmistä ovat isomorfisia ja rakenna isomorfismit eksplisiittisesti:

- (i) kompleksiluvut $(1, i, -1, -i)$ kertolaskun suhteen;
- (ii) kokonaisluvut $(2, 4, 6, 8)$ kertolaskun mod 10 suhteen;
- (iii) permutaatiot $(), (12), (34), (12)(34)$;
- (iv) permutaatiot $(), (1234), (1432), (13)(24)$;
- (v) neljä matriisia

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

matriisien kertolaskun suhteen.

2. Osoita että $U(n)$ on $GL(n, C)$:n aito aliryhmä, ja että $\dim U(n) = n^2$.

3. Tarkastellaan *Möbius-kuvausten* joukkoa

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \rightarrow C \mid f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C) \right\}.$$

i) Osoita että Mob on ryhmä, kun tulona on kuvausten yhdistäminen.

ii) Osoita että kuvaus

$$f : SL(2, C) \rightarrow Mob ; f(A) = f_A$$

on homomorfismi.

4. Etsi permutaatioryhmän S_4 konjugaattiluokat. (Vihje: katso Jones, luku 2.)

5. Edellisten harjoitusten 3. tehtävässä esiintynyt ryhmä on esimerkki ns. **dihedrisistä ryhmistä** D_n , jotka ovat suunnistamattomien n -polygonien symmetriaryhmiä (rotaatiot vastapäivään ja heijastukset). Lisää voit lukea Jonesin 1. luvusta. Harj. 1 tehtävä 3:n ryhmä oli D_3 . Tarkastellaan seuraavaksi ryhmää D_4 , eli neliön symmetriamuunnoksia. Ryhmän generoivat identiteettikuvaus e , 90 asteen rotaatio a origon suhteen vastapäivään, sekä heijastus c origon ja yhden sivun keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Etsi D_4 :n konjugaattiluokat

i) tulkitsemalla D_4 :n elementit neliön kärkien permutaatioina (eli permutaatioryhmän S_4 elementteinä).

ii) käyttämällä geometrista tulkintaa.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, September 22.

1. State which of the following groups are isomorphic to each other, giving the explicit correspondence where an isomorphism exists:

(i) the complex numbers $(1, i, -1, -i)$ with respect to multiplication;

(ii) the integers $(2,4,6,8)$ with respect to multiplication modulo 10;

(iii) the permutations $(), (12), (34), (12)(34)$;

(iv) the permutations $(), (1234), (1432), (13)(24)$;

(v) the four matrices

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

with respect to matrix multiplication.

(Note: This exercise is from Jones' book, ex. 1.5)

2. Show that $U(n)$ is a proper subgroup of $GL(n, C)$ and that $\dim U(n) = n^2$.

3. Consider the set of *Mobius transformations*

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \rightarrow C \mid f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, C) \right\} .$$

i) Show that Mob is a group, with composition of mappings as the product.

ii) Show that the mapping

$$f : SL(2, C) \rightarrow Mob ; f(A) = f_A$$

is a homeomorphism.

4. Find the conjugacy classes of the permutation group S_4 . (Hint: see Jones, section 2.)

5. In exercise 3 of the first problem set, you considered an example of so called **dihedral groups** D_n , the symmetry groups of regular polygons with n undirected sides (with counterclockwise rotations and reflections as the symmetry operations). You can read more about them in chapter 1 of Jones. The group in exercise 1.3 was D_3 . Consider now the group D_4 : the symmetry transformations of a square. It is generated by the identity map e , 90 degree counterclockwise rotations a about the origin, and reflections c about a symmetry axis through the origin and the center point of one of the sides. Find the conjugacy classes of D_4

i) by considering the elements of $D_4:n$ as permutations $\in S_4$ of the vertices of the square.

ii) by geometrical considerations.