Fysiikan matemaattiset menetelmät III   Sl 2004, Harjoitus 12

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 8.12. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon. Itsenäisyyspäivän johdosta ma 6.12. ei harjoituksia. Viimeinen luento 9.12., viimeinen harjoitus ma 13.12.
Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, December 8. Due to the Day of Independence celebrations, no exercise session on Monday, December 6th. Last lecture December 9, last exercise session Monday, December 13.

1. (Nakahara 7.3) Olkoon kuvaus $f : T^2 \to R^3$ toruksen upotus euklidiseen avaruuteen (R^3, δ) (missä metriikka $\delta = \mathrm{diag}(1,1,1)$), muotoa

$$f : (\theta, \phi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta) \ , \tag{1}$$

missä $R > r$. Laske T^2:lle indusoituva metriikka $g = f^*\delta$.

Let $f : T^2 \to R^3$ be an embedding of the torus into the Euclidean space (R^3, δ) (with the metric $\delta = \mathrm{diag}(1,1,1)$), of the form (3) where $R > r$. Find the induced metric $g = f^*\delta$ on T^2.

2. Olkoon metriikka toruksella T^2 jonka säteet ovat r ja $R > r$

$$g = r^2 d\theta \otimes d\theta + (R + r\cos\theta)^2 d\phi \otimes d\phi \ , \tag{2}$$

missä $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$. Laske Christoffelin symbolit

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$$

metriikalle (2).

Calculate the Christoffel symbols for the metric (2) on the torus T^2.

3. Johda geodeettiset yhtälöt toruksella metriikalle (2)

i) variaatioperiaatteella käyttäen hyväksi vapaan massiivisen pistehiukkasen Lagrangen funktiota (käyrän pituuden vaikutusta, ks. luentojen kappale 5.9). Sijoita aluksi toruksen metriikka (sopivaan) Lagrangen tiheyteen.

ii) sijoittamalla tehtävän 2 Christoffelin symbolit geodeettisen viivan yleiseen yhtälöön.

Kumpi menetelmä olisi mielestäsi helpompi, jos et olisi jo laskenut Christoffelin symboleita edellisessä tehtävässä? Tämän jälkeen,

iii) Ratkaise yhtälöt ja

iv) Hahmottele esimerkkejä geodeettisista viivoista toruksella.

Find the geodesic equation(s) on a torus with the metric (2), by

i) using the variational principle and the action of a free massive point particle (the expression for the length of a curve, see section 5.9 of lecture notes). As a first step, substitute the torus metric into the (suitable) Lagrangian.

ii) substituting the Christoffel symbols from problem 2 to the general geodesic equation.

Which method do you think would be easier, if you had not already calculated the Christoffel symbols in problem 2? Next,

iii) Solve the equations, and

iv) sketcth some examples of geodesics on a torus.

4. **Homogeeninen ja isotrooppinen maailmankaikkeus**. Tätä kuvaa ns. Robertson-Walker metriikka

$$g = -dt \otimes dt + a^2(t)\left(\frac{dr \otimes dr}{1 - kr^2} + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta \; d\phi \otimes d\phi)\right) , \qquad (3)$$

missä $k = -1, 0,$ tai 1. Laske R-W metriikalle Riemannin kaarevuustensorin ja Riccin tensorin komponentit, ja skalaarikaarevuus R.

The spatially homogenous and isotropic universe is described by the Robertson-Walker metric (3). Calculate the Riemann tensor, the Ricci tensor, and the scalar curvature.