

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 24.11. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. (Nakahara (1. p.) 5.34) Olkoon $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ ja $f : M \rightarrow N$. Osoita että

i) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

ii) $f^*(\xi \wedge \omega) = (f^*\xi) \wedge (f^*\omega)$

2. Olkoon $s^3 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ suunnistettu 3-simpleksi R^3 :ssa. Osoita eksplisiittisesti että $\partial^2 s^3 = 0$.

3. Olkoon ω 4-muoto

$$\omega = (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

ja \bar{s}^4 vakiosimpleksi R^4 :ssä. Laske

$$\int_{\bar{s}^4} \omega.$$

4. (Nakahara 6.2) Olkoon $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Osoita että Stokesin lauseen yleisestä muodosta seuraa että

$$\int_S (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{s},$$

missä $\vec{\omega} = (a, b, c)$ ja C on pinnan S reuna. Samaan tapaan, olkoon $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, osoita nyt että

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\psi} dV = \oint_S \vec{\psi} \cdot d\vec{S},$$

missä vektorin $\vec{\psi}$ komponentit ovat $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ ja S on alueen V reuna.

5. Olkoon

$$\omega = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{|x|^3}$$

2-muoto $R^3 \setminus \{0\}$:ssa. Näytä että ω on suljettu ($d\omega = 0$). Laske

$$\int_{S^2} \omega.$$

Vihje: Yksi tapa:

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2 \setminus \{0,0,1\}} \omega.$$

(Miksi?). Käyttäen $S^2 \setminus \{0,0,1\}$:n stereografista kuvausta $f : R^2 \rightarrow S^2$ laske

$$\int_{S^2} \omega = \int_{R^2} (f^{-1})^* \omega.$$

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, November 24.

1. (Nakahara (1st ed.) 5.34) Let $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ and $f : M \rightarrow N$. Show that

i) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

ii) $f^*(\xi \wedge \omega) = (f^*\xi) \wedge (f^*\omega)$

2. Let $s^3 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ be an oriented 3-simplex in R^3 . Show explicitly that $\partial^2 s^3 = 0$.

3. Consider the 4-form

$$\omega = (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4,$$

and let \bar{s}^4 be the standard simplex in R^4 . Calculate

$$\int_{\bar{s}^4} \omega.$$

4. (Nakahara 6.2) Let $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Show that Stokes' theorem implies

$$\int_S (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{s},$$

where $\vec{\omega} = (a, b, c)$ and C is the boundary of a surface S . In a similar vein, for $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, show

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\psi} dV = \oint_S \vec{\psi} \cdot d\vec{S},$$

where the components of the vector $\vec{\psi}$ are $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ and S is the boundary of a volume V .

5. Let ω be the 2-form

$$\omega = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{|x|^3}$$

on $R^3 \setminus \{0\}$. Show that ω is closed ($d\omega = 0$). Calculate

$$\int_{S^2} \omega.$$

Hint: One way is to first notice that

$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2 \setminus \{0,0,1\}} \omega.$$

(why?) and then use the inverse of the stereographic map f from $S^2 \setminus \{0,0,1\}$ to R^2 to calculate

$$\int_{S^2} \omega = \int_{R^2} (f^{-1})^* \omega.$$