Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2003, Harjoitus 7

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 5.11. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon. HUOM! Maanantaina 10.11. ei pidetä harjoituksia!

1. **Esimerkkejä homotopiaryhmistä**. Olkoon

i) $M = R^3 \backslash \{\text{piste}\}$. Laske $\pi_1(M)$.

ii) $M = R^3 \backslash \{\text{suora}\}$. Laske $\pi_1(M)$.

iii) $M = R^2 \backslash \{x_1, x_2\}$ missä $x_1 \neq x_2$ ovat 2 eri pistettä R^2:ssa. Laske $\pi_1(M)$. **Vihje:** Nakahara, luku 4.4.1.

2. Etsi kartasto ja koordinaatit torukselle $T^2 = S^1 \times S^1$.

3. Olkoon differentioituva monisto M_1 reaalilukujen joukko R, koordinaattina $\phi_1(x) = x$, ja M_2 myöskin R mutta koordinaattina $\phi_2(x) = x^3$. Osoita että M_1 ja M_2 ovat diffeomorfiset. (Ts. etsi sopiva kuvaus $f : M_1 \to M_2$ ja osoita sen olevan diffeomorfismi.)

4. Etsi projektiiviselle avaruudelle RP^n (määritelmä: katso moniste sivu 39) kartasto, koordinaatit ja transitiofunktiot.

5. Osoita, että $GL(n, R)$ on differentioituva monisto.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, November 5. NOTE: No examples class on Monday, November 11!

1. **Examples of Homotopy Groups**. Let

i) $M = R^3 \backslash \{\text{point}\}$. Calculate $\pi_1(M)$.

ii) $M = R^3 \backslash \{\text{line}\}$. Calculate $\pi_1(M)$.

iii) $M = R^2 \backslash \{x_1, x_2\}$ where $x_1 \neq x_2$ are 2 different points in R^2. Calculate $\pi_1(M)$. **Hint:** Nakahara, section 4.4.1.

2. Find an atlas and coordinates for the torus $T^2 = S^1 \times S^1$.

3. Let the differentiable manifold M_1 be the set of real numbers R, with the coordinate $\phi_1(x) = x$, and the manifold M_2 also be R but with the coordinate $\phi_2(x) = x^3$. Show that M_1 and M_2 are diffeomorphic. (I.e., find a suitable map $f : M_1 \to M_2$ and show that it is a diffeomorphism.)

4. Find an atlas, coordinates, and transition functions for the projective space RP^n (defined on p. 39 of the lecture notes).

5. Show that $GL(n, R)$ is a differentiable manifold.