Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2003, Harjoitus 6

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 29.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Osoita että funktio $f : R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 \ , \ x \leq 0 \\ -x+\frac{1}{2} \ , \ x > 0 \end{cases}$$

ei ole jatkuva R:n tavallisessa topologiassa.

2. Olkoon $X = \{\text{Arska}, \text{Kake}, \text{Pave}, \text{Reiska}\}$ ja $U_0 = \emptyset$, $U_1 = \{\text{Arska}\}$, $U_2 = \{\text{Arska}, \text{Kake}\}$, $U_3 = X$. Osoita että $\tau = \{U_0, U_1, U_2, U_3\}$ määrittelee X:n topologian. Osoita että (X, τ) ei ole Hausdorffin avaruus.

3. Osoita että R^n varustettuna tavallisella topologialla on Hausdorffin avaruus. Olkoon X joukko jossa on määritelty metriikka d. Osoita että X varustettuna metrisellä topologialla on Hausdorffin avaruus.

4. Olkoon $f : M \to N$ homeomorfismi. Määritellään kuvaus $f_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, f(x_0))$ ehdolla $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Osoita että f_* on ryhmäisomorfismi (eli $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(N, f(x_0))$).

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 29.

1. Show that the map $f : R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 \ , \ x \leq 0 \\ -x+\frac{1}{2} \ , \ x > 0 \end{cases}$$

is not continuous in the usual topology of R.

2. Let $X = \{\text{Billy}, \text{Bob}, \text{Jim}, \text{Joe}\}$ and $U_0 = \emptyset$, $U_1 = \{\text{Billy}\}$, $U_2 = \{\text{Billy}, \text{Bob}\}$, $U_3 = X$. Show that $\tau = \{U_0, U_1, U_2, U_3\}$ gives a topology in X. Show that (X, τ) is not Hausdorff.

3. Show that R^n with the usual topology is Hausdorff. Let X be a set with a metric d. Show that X with the metric topology is Hausdorff.

4. Let $f : M \to N$ be a homeomorphism. Define a map $f_* : \pi_1(M, x_0) \to \pi_1(N, f(x_0))$ such that $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Show that f_* is a group isomorphism (*i.e.* $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(N, f(x_0))$)