Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2003, Harjoitus 3

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 8.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. Etsi $SL(2,C)$:n aliryhmä H siten että tekijäryhmä $SL(2,C)/H$ on isomorfinen Möbius-kuvausten ryhmän Mob:in kanssa. Perustele.

2. Osoita että $O(n+1)/O(n) = S^n$, $U(n+1)/U(n) = S^{2n+1}$.

3. 2x2-kompleksimatriiseja

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

kutsutaan Paulin spin-matriiseiksi.

i) Osoita että kuvaus R: $SU(2) \to SO(3,R)$, $U \mapsto R(U)$, missä

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} tr(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

(tr= matriisin jälki) on homomorfismi.

ii) Voidaan osoittaa että R on surjektio. Osoita että kuvauksena $SU(2)/Z_2$:sta $SO(3,R)$:ään R on isomorfismi.

Vihje: spin-matriisit toteuttavat

$$\sigma_k \sigma_l = 1_{2x2} \delta_{kl} + i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm} \sigma_m \; .$$

4. $SU(1,1)$ on ryhmä jonka alkiot $\tilde{g}$ ovat 2x2-kompleksimatriiseja

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} z & w \\ w^* & z^* \end{pmatrix} \; ,$$

missä $|z|^2 - |w|^2 = 1$ ja $SL(2,R)$:n alkiot g ovat 2x2-reaalimatriiseja

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ,$$

missä $ad - bc = 1$. Osoita että kuvaus μ,

$$\mu(g) = N g N^{-1}$$

missä

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \; ,$$

on isomorfismi $\mu : SL(2,R) \to SU(1,1)$.

5. Luennoilla osoitettiin että $SU(2)$:n matriisit voitiin kirjoittaa muodossa

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} ,$$

joten reaaliluvut $x_i, i = 0, \ldots, 3$ toteuttavat ehdon $x_0^2 + \cdots + x_3^2 = 1$. Siispä $SU(2)$:n koordinaatit kuuluvat yksikköpallon S^3 pinnalle.

i) Osoita että vastaavasti $SL(2, R)$ voidaan parametrisoida neljällä koordinaatilla $x_0, \ldots, x_3$ joiden välillä on sidosehto muotoa

$$c_0 x_0^2 + c_3 x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = c \ .$$

Etsi c_0, c_3, c. Vihje: yhtälö tulee kuvaamaan yhdestä neljästä mahdollisesta 3-ulotteisesta ns. yksikköpseudopallosta. Yleisemmin n-ulotteiset yksikköpseudopallot ovat vakiokaarevia n-ulotteisia hyperpintoja R^{n+1}:ssä, joita kuvaa yhtälö

$$c_0 x_0^2 + c_n x_n^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = c \ ,$$

missä $c_0, c_n, c = \pm 1$. Mahdollisia vaihtoehtoja on neljä:

- $(c_0, c_n, c) = (-1, -1, -1)$: n-ulotteinen anti-de Sitter avaruus adS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, 1)$: n-ulotteinen de Sitter avaruus dS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1, 1, -1)$: n-ulotteinen hyperbolinen avaruus H_n
- $(c_0, c_n, c) = (1, 1, 1)$: n-ulotteinen pallo S^n.

ii) Etsi $SL(2, R)$:n konjugaattiluokat (vihje: niitä on kolmea eri tyyppiä) ja tulkitse ne mahdollisuuksien mukaan 2-ulotteisina pseudopalloina.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 8.

1. Find a subgroup H of $SL(2, C)$ such that the quotient group $SL(2, C)/H$ is isomorphic to the group Mob of Mobius transformations. Argue why your choice of H works.

2. Show that $O(n + 1)/O(n) = S^n$, $U(n + 1)/U(n) = S^{2n+1}$.

3. The 2x2 complex matrices

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are called Pauli spin matrices.

i) Show that the map R: $SU(2) \to SO(3, R)$, $U \mapsto R(U)$, where

$$R_{kl}(U) = \frac{1}{2} tr(\sigma_k U \sigma_l U^\dagger)$$

(tr= matrix trace) is a group homomorphism.

ii) It can be shown that R is a surjection. Show that as a map $SU(2)/Z_2 \rightarrow SO(3,R)$ R is an isomorphism.

Hint: the spin matrices satisfy

$$\sigma_k \sigma_l = 1_{2x2}\delta_{kl} + i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{klm}\sigma_m \ .$$

4. $SU(1,1)$ is a group where the elements $\tilde{g}$ are 2x2 complex matrices

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} z & w \\ w^* & z^* \end{pmatrix} ,$$

with $|z|^2 - |w|^2 = 1$. The elements of $SL(2,R)$ are 2x2 real matrices

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

with $ad - bc = 1$. Show that the map μ,

$$\mu(g) = NgN^{-1}$$

where

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} ,$$

is an isomorphism $\mu : SL(2,R) \rightarrow SU(1,1)$.

5. In the lectures it was shown that the $SU(2)$ matrices can be written in the form

$$g = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix} ,$$

where the real parameters $x_i, i = 0, \ldots, 3$ satisfy the constraint $x_0^2 + \cdots + x_3^2 = 1$. Thus the parameters of $SU(2)$ are coordinates of a unit sphere S^3.

i) Show that $SL(2,R)$ can be parameterized by four real numbers $x_0, \ldots, x_3$ which satisfy a constraint of the form

$$c_0 x_0^2 + c_3 x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = c \ .$$

Find c_0, c_3, c. Hint: The equation will describe one of the four so-called unit pseudospheres. In general, n-dimensional unit pseudospheres are n-dimensional hypersurfaces of constant curvature in R^{n+1}, defined by an equation of type

$$c_0 x_0^2 + c_n x_n^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = c ,$$

where $c_0, c_n, c = \pm 1$. There are four possible alternatives:

- $(c_0, c_n, c) = (-1,-1,-1)$: n-dimensional anti-de Sitter space adS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1,1,1)$: n-dimensional de Sitter space dS_n
- $(c_0, c_n, c) = (-1,1,-1)$: n-dimensinal hyperbolic space H_n
- $(c_0, c_n, c) = (1,1,1)$: n-sphere S^n.

ii) Find the conjugacy classes of $SL(2,R)$ (hint: there are 3 different types of them) and interpret them as 2-dimensional pseudospheres, if possible.