Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2003, Harjoitus 2

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 1.10. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. a)Kirjoita permutaatiot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

syklien avulla.

b)Mitkä ovat a-kohdan permutaatioiden kertaluvut? Mikä on permutaation $(a_1 a_2 \dots a_{2r})(b_1 b_2 \dots b_r)$ kertaluku?

2. Tutki mitkä seuraavista ryhmistä ovat isomorfisia ja rakenna isomorfismit eksplisiittisesti:

(i) kompleksiluvut $(1, i, -1, -i)$ kertolaskun suhteen;

(ii) kokonaisluvut (2,4,6,8) kertolaskun mod 10 suhteen;

(iii) permutaatiot (), (12), (34), (12)(34);

(iv) permutaatiot (), (1234), (1432), (13)(24);

(v) neljä matriisia

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

matriisien kertolaskun suhteen.

3. Tarkastellaan *Möbius-kuvausten* joukkoa

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,C) \right\} .$$

i) Osoita että Mob on ryhmä, kun tulona on kuvausten yhdistäminen.

ii) Osoita että kuvaus

$$f : SL(2,C) \to Mob \; ; \; f(A) = f_A$$

on homomorfismi.

4. Etsi permutaatioryhmän S_4 konjugaattiluokat. (Vihje: katso Jones, luku 2.)

5. Edellisten harjoitusten 3. tehtävässä esiintynyt ryhmä on esimerkki ns. **dihedrisistä ryhmistä** D_n, jotka ovat suunnistamattomien n-polygonien symmetriaryhmiä (rotaatiot vastapäivään ja heijastukset). Lisää voit lukea Jonesin 1. luvusta. Harj. 1 tehtävä 3:n ryhmä oli D_3. Tarkastellaan seuraavaksi ryhmää D_4, eli neliön symmetriamuunnoksia. Ryhmän generoivat identiteettikuvaus e, 90 asteen rotaatio a origon suhteen vastapäivään, sekä heijastus c origon ja yhden sivun keskipisteen kautta kulkevan akselin suhteen. Etsi D_4:n konjugaattiluokat

i) tulkitsemalla D_4:n elementit neliön kärkien permutaatioina (eli permutaatioryhmän S_4 elementteinä).

ii) käyttämällä geometrista tulkintaa.

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, October 1.

1 a) Write the permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

in cycle notation.

b) What is the order of the two permutations in a)? What is the order of the permutation $(a_1a_2\ldots a_{2r})(b_1b_2\ldots b_r)$?

2. State which of the following groups are isomorphic to each other, giving the explicit correspondence where an isomorphism exists:

(i) the complex numbers $(1, i, -1, -i)$ with respect to multiplication;

(ii) the inegers (2,4,6,8) with respect to multiplication modulo 10;

(iii) the permutations (), (12), (34), (12)(34);

(iv) the permutations (), (1234), (1432), (13)(24);

(v) the four matrices

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

with respect to matrix multiplication.

3. Consider the set of *Mobius transformations*

$$Mob \equiv \left\{ f_A : C \to C \mid f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,C) \right\} .$$

i) Show that Mob is a group, with composition of mappings as the product.

ii) Show that the mapping

$$f : SL(2,C) \to Mob \ ; \ f(A) = f_A$$

is a homeomorphism.

4. Find the conjugacy classes of the permutation group S_4. (Hint: see Jones, section 2.)

5. In exercise 3 of the first problem set, you considered an example of so called **dihedral groups** D_n, the symmetry groups of regular polygons with n undirected sides (with counterclockwise rotations and reflections as the symmetry operations). You can read more about them in chapter 1 of Jones. The group in exercise 1.3 was D_3. Consider now the group D_4: the symmetry transformations of a square. It is generated by the identity map e, 90 degree counterclockwise rotations a about the origin, and reflections c about a symmetry axis through the origin and the center point of one of the sides. Find the conjugacy classes of D_4

i) by considering the elements of D_4:n as permutations $\in S_4$ of the vertices of the square.

ii) by geometrical considerations.