Fysiikan matemaattiset menetelmät III Sl 2003, Harjoitus 10

Tehtävät palautetaan viimeistään keskiviikkona 3.12. Physicumin 2. kerroksen A-siiven aulassa olevaan laatikkoon.

1. (Nakahara 5.34) Olkoon $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ ja $f : M \to N$. Osoita että

   i) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

   ii) $f^*(\xi \wedge \omega) = (f^*\xi) \wedge (f^*\omega)$

2. Olkoon $s^3 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ suunnistettu 3-simpleksi R^3:ssa. Osoita eksplisiittisesti että $\partial^2 s^3 = 0$.

3. Olkoon ω 4-muoto
$$\omega = (x^1)^2 \; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \ ,$$
ja $\bar{s}^4$ vakiosimpleksi R^4:ssä. Laske
$$\int_{\bar{s}^4} \omega \ .$$

4. (Nakahara 6.2) Olkoon $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Osoita että Stokesin lauseen yleisestä muodosta seuraa että
$$\int_S (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{s} \ ,$$
missä $\vec{\omega} = (a, b, c)$ ja C on pinnan S reuna. Samaan tapaan, olkoon $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, osoita nyt että
$$\int_V \nabla \cdot \vec{\psi} \; dV = \oint_S \vec{\psi} \cdot d\vec{S} \ ,$$
missä vektorin $\vec{\psi}$ komponentit ovat $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ ja S on alueen V reuna.

5. Olkoon
$$\omega = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{|x|^3}$$
2-muoto $R^3 \setminus \{0\}$:ssa. Näytä että ω on suljettu. Laske
$$\int_{S^2} \omega.$$
Vihje: Yksi tapa:
$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2 \setminus \{0,0,1\}} \omega.$$
(Miksi?). Käyttäen $S^2 \setminus \{0, 0, 1\}$:n stereografista kuvausta f R^2:lle laske
$$\int_{S^2} \omega = \int_{R^2} (f^{-1})^* \omega.$$

English text:

Return your solutions to the box in the entrance hall on the second floor of the A-wing in Physicum by Wednesday, December 3.

1. (Nakahara 5.34) Let $\xi, \omega \in \Omega^r(N)$ and $f : M \to N$. Show that

   i) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

   ii) $f^*(\xi \wedge \omega) = (f^*\xi) \wedge (f^*\omega)$

2. Let $s^3 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ be an oriented 3-simplex in R^3. Show explicitely that $\partial^2 s^3 = 0$.

3. Consider the 4-form
$$\omega = (x^1)^2 \; dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 \;,$$
and let $\bar{s}^4$ be the standard simplex in R^4. Calculate
$$\int_{\bar{s}^4} \omega \;.$$

4. (Nakahara 6.2) Let $M = R^3$, $\omega = adx + bdy + cdz$. Show that Stokes' theorem implies
$$\int_S (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{s} \;,$$
where $\vec{\omega} = (a, b, c)$ and C is the boundary of a surface S. In a similar vein, for $\psi = \frac{1}{2}\psi_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, show
$$\int_V \nabla \cdot \vec{\psi} \; dV = \oint_S \vec{\psi} \cdot d\vec{S} \;,$$
where the components of the vector $\vec{\psi}$ are $\psi^\lambda = \varepsilon^{\lambda\mu\nu}\psi_{\mu\nu}$ and S is the boundary of a volume V.

5. Let ω be the 2-form
$$\omega = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{|x|^3}$$
on $R^3 \setminus \{0\}$. Show that ω is closed. Calculate
$$\int_{S^2} \omega.$$
Hint: One way is to first notice that
$$\int_{S^2} \omega = \int_{S^2 \setminus \{0,0,1\}} \omega.$$
(why?) and then use the inverse of the stereographic map f from $S^2 \setminus \{0, 0, 1\}$ to R^2 to calculate
$$\int_{S^2} \omega = \int_{R^2} (f^{-1})^* \omega.$$